MAT 201 DOĞRUSAL CEBİR İLE İLGİLİ ÖRNEK SORULAR

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

1. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 5x_1 - 3x_2 &= 7 \end{aligned}$ denklem sistemini Gauss yöntemiyle çözünüz.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & -3 & 7 \end{bmatrix} \overset{(-2)R_2+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -9 & -7 \end{bmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -9 & -7 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-2)R_1+R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -9 & -7 \\ 0 & 21 & 21 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{21}R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -9 & -7 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. En sağdaki satırca basamak matrisinin gösterdiği lineer denklem sistemi göz önüne alındığında ikinci denklemden $x_2 = 1$ olduğu görülür. Birinci denklemde x_2 yerine 1 konularak $x_1 - 9 \cdot 1 = -7$ ve buradan $x_1 = 2$ bulunur. □

2. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini Gauss-Jordan yöntemiyle çözünüz.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{(-2)R_1+R_3\to R_3}{\overset{(-3)R_1+R_2\to R_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -14 & 19 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_3+R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 & -4 \\ 0 & \mathbf{1} & -6 & 7 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \end{bmatrix} \underset{(-4)R_2+R_3\to R_3}{\overset{1R_2+R_1\to R_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -3 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 16 & -16 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{16}R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -3 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -6 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{bmatrix} \underset{6R_3+R_2\to R_2}{\overset{3R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. En sağdaki satırca indirgenmiş basamak matrisinin gösterdiği lineer denklem sistemi göz önüne alındığında verilen lineer denklem sisteminin çözümünün $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ eşitlikleriyle belirli olduğu hemen görülebilir. □

3. Aşağıdaki denklem sistemlerini Gauss-Jordan yoketme yöntemiyle çözünüz.

$$\textbf{(a)}\ \begin{array}{r} 3x_1+2x_2+2x_3=5\\ 4x_1+3x_2+2x_3=8\\ 2x_1+x_2+x_3=3 \end{array} \qquad \textbf{(b)}\ \begin{array}{r} x_1+2x_2+4x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+x_3=-1 \end{array} \qquad \textbf{(c)}\ \begin{array}{r} -3x_1+2x_2+x_3=7\\ x_1-x_2-2x_3=-3\\ -x_1+x_2+2x_3=3 \end{array}$$

Çözüm: (**a**) Verilen denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 2 & 8\\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_3+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 8\\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{(-2)R_1+R_3\to R_3}{\overset{(-4)R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-1)R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2\\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{1R_2+R_3\to R_3}{\overset{(-1)R_2+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 2\\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(-2)R_3+R_2\to R_2}{\overset{1R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1\\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. En sağdaki satırca indirgenmiş basamak matrisinin gösterdiği lineer denklem sistemi göz önüne alındığında verilen lineer denklem sisteminin çözümünün $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ eşitlikleriyle belirli olduğu hemen görülebilir.

(**b**) $$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{(-1)R_1+R_3\to R_3}{\overset{(-1)R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 4 & 0\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_2\to R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 4 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 2\\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \underset{1R_2+R_3\to R_3}{\overset{(-2)R_2+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & -4\\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \underset{2R_3+R_2\to R_2}{\overset{4R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

dir. En sağdaki satırca indirgenmiş basamak matrisinin gösterdiği lineer denklem sistemindeki üçüncü denklemi doğrulayan x_1, x_2, x_3 sayıları bulunmadığından denklem sisteminin çözümü yoktur. Tutarsız bir denklem sistemidir.

(**c**) $$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 7\\ 1 & -1 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & -2 & -3\\ -3 & 2 & 1 & 7\\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{1R_1+R_3\to R_3}{\overset{3R_1+R_2\to R_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -5 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & -2 & -3\\ 0 & \mathbf{1} & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{1R_2+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & -1\\ 0 & \mathbf{1} & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. En sağdaki satırca indirgenmiş basamak matrisinin gösterdiği lineer denklem sisteminde $x_3 = k$ diyelim. Verilen denklem sisteminin çözümü, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x_1 = -1 - 3k$,

$x_2 = 2 - 5k$, $x_3 = k$ eşitlikleriyle belirlidir. $\square$

4. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{array}{r} (k-1)\,x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + (k-1)\,x_2 = 0 \end{array}$ (1) lineer denklem sistemi veriliyor.

k sayısının aldığı değerlere bağlı olarak (1) denklem sisteminin çözümlerini irdeleyiniz.

Çözüm: (1) denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} k-1 & -1 & 1 \\ -1 & k-1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & k-1 & 0 \\ k-1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -k+1 & 0 \\ k-1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-k+1)R_1 + R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -k+1 & 0 \\ 0 & k^2-2k & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$k^2 - 2k \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -k+1 & 0 \\ 0 & k^2-2k & 1 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{k^2-2k}R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -k+1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{k^2-2k} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminden $x_2 = \frac{1}{k^2-2k}$ olduğu hemen görülmektedir. Birinci denklemde x_2 yerine $\frac{1}{k^2-2k}$ konularak $x_1 + (-k+1)\frac{1}{k^2-2k} = 0$ ve buradan $x_1 = \frac{k-1}{k^2-2k}$ elde edilir.

$k^2 - 2k = 0$ olsun. Bu durumda $k = 2$ veya $k = 0$ olur.

$k = 2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -k+1 & 0 \\ 0 & k^2-2k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde ikinci denklem $0x_1 + 0x_2 = 1$ denklemidir. Bu denklemin çözümü bulunmadığından (1) lineer denklem sistemi $k = 2$ için tutarsızdır.

$k = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -k+1 & 0 \\ 0 & k^2-2k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde ikinci denklem $0x_1 + 0x_2 = 1$ denklemidir. Bu denklemin çözümü bulunmadığından (1) lineer denklem sistemi $k = 0$ için tutarsızdır. $\square$

5. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 = a \\ -6x_1 + 4x_2 = b \end{array}$ (1) lineer denklem sistemi veriliyor.

a ve b sayılarının aldığı değerlere bağlı olarak (1) denklem sisteminin çözümlerini irdeleyiniz.

Çözüm: (1) denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & a \\ -6 & 4 & b \end{bmatrix} \overset{2R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -2 & a \\ 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix}$$

bulunur.

$2a + b \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2a+b}R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \overset{(-\frac{a}{3})R_2+R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde ikinci denklem $0x_1 + 0x_2 = 1$ denklemidir. Bu denklemin çözümü bulunmadığından (1) lineer denklem sistemi $2a+b \neq 0$ için tutarsızdır.

$2a + b = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde $x_2 = t$ diyelim. Birinci denklemde x_2 yerine t konularak $x_1 = \frac{a}{3} + \frac{2}{3}t$ elde edilir. $2a + b = 0$ için (1) denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır ve bu çözümler $x_1 = \frac{a}{3} + \frac{2}{3}t$ ve $x_2 = t$ eşitlikleriyle belirlidir. $\square$

6. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 6x_1 + 3x_2 = a \end{array}$ (1) lineer denklem sistemi veriliyor.

a sayısının aldığı değerlere bağlı olarak (1) denklem sisteminin çözümlerini irdeleyiniz.

Çözüm: (1) denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & a \end{bmatrix} \overset{(-3)R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-9 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & a-9 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$a-9 \neq 0$ olsun. $a \neq 9$ demektir. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & a-9 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{a-9}R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \overset{(-\frac{3}{2})R_2+R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde ikinci denklem $0x_1 + 0x_2 = 1$ denklemidir. Bu denklemin çözümü bulunmadığından (1) lineer denklem sistemi $a \neq 9$ için tutarsızdır.

$a-9 = 0$ olsun. $a = 9$ demektir. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & a-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde $x_2 = 2t$ diyelim. Birinci denklemde x_2 yerine t konularak $x_1 = \frac{3}{3} + t$ elde edilir. $a = 9$ için (1) denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır ve bu çözümler $x_1 = \frac{3}{3} + t$ ve $x_2 = 2t$ eşitlikleriyle belirlidir. $\square$

7. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= -2 \\ 4x_1 + x_2 + (a^2-14)x_3 &= a+2 \end{aligned} \quad (1)$$
lineer denklem sistemi veriliyor.

(**a**) a sayısının hangi değerleri için (1) denklem sisteminin bir tek çözümü vardır?
(**b**) a sayısının hangi değerleri için (1) denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır?
(**c**) a sayısının hangi değerleri için (1) denklem sistemi tutarsız olur?

Çözüm: (1) denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{bmatrix} \underset{(-4)R_1+R_3 \to R_3}{\overset{(-3)R_1+R_2 \to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -14 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-10 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-\frac{1}{7})R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-10 \end{bmatrix} \underset{7R_2+R_3 \to R_3}{\overset{(-2)R_2+R_1 \to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a+4 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$a^2 - 16 \neq 0$ olsun. $a \in \mathbb{R} - \{-4, 4\}$ demektir. Bu durumda

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a+4 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{a^2-16}R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{a-4} \end{array}\right]$$

$$\underset{2R_3+R_2 \to R_2}{\overset{(-1)R_3+R_1 \to R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-4} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{2a-6}{a-4} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{a-4} \end{array}\right]$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminden $x_1 = \frac{-1}{a-4}$, $x_2 = \frac{2a-6}{a-4}$, $x_3 = \frac{1}{a-4}$ elde edilir. $a \in \mathbb{R} - \{-4, 4\}$ için (1) denkleminin bir tek çözümü vardır.

$a^2 - 16 = 0$ olsun. Bu durumda $a = -4$ veya $a = 4$ olur.

$a = -4$ olsun. Bu durumda

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a+4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde $x_3 = t$ diyelim.

$$x_1 = -t, \quad x_2 = 2 + 2t$$

olur. $a = -4$ için denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır.

$a = 4$ olsun. Bu durumda

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a+4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{8}R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

$$\overset{(-2)R_3+R_2 \to R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde üçüncü denklem

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

denklemidir. Bu denklemin çözümü bulunmadığından (1) lineer denklem sistemi $a = 4$ için tutarsızdır. □

8. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_3 &= 2 \\ (a^2-4)x_3 &= a+2 \end{aligned} \qquad (1)$$
lineer denklem sistemi veriliyor.

a sayısının aldığı değerlere bağlı olarak (1) denklem sisteminin çözümlerini irdeleyiniz.

Çözüm: (1) denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{bmatrix} \underset{(-a^2+4)R_2+R_3\to R_3}{\overset{(-1)R_2+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2a^2+a+10 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$-2a^2+a+10 \neq 0$ olsun. $a \in \mathbb{R}-\left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$ demektir. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2a^2+a+10 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{-2a^2+a+10}R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(-2)R_3+R_2\to R_2}{\overset{(-2)R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde üçüncü denklem

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

denklemidir. Bu denklemin çözümü bulunmadığından (1) lineer denklem sistemi $a \in \mathbb{R}-\left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$ için tutarsızdır.

$-2a^2+a+10 = 0$ olsun. Bu durumda $a=-2$ veya $a=\frac{5}{2}$ olur.

$a=-2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2a^2+a+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde $x_2 = t$ diyelim.

$$x_1 = 2-t, \quad x_3 = 2$$

olur. $a=-2$ için denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır.

$a=\frac{5}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2a^2+a+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminde $x_2 = t$ diyelim.

$$x_1 = 2 - t, \quad x_3 = 2$$

olur. $a = \frac{5}{2}$ için denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır.

(1) denklem sisteminin bir tek çözümü olacak biçimde a sayısı bulunamaz. □

9.
$$\begin{aligned} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{aligned} \qquad (1)$$

denklem sisteminin çözümü, $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$ olacak biçimde a, b, c sayıları varsa bulunuz.

Çözüm: (1) denklem sisteminin çözümünün $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$ olması isteniyor. Buna göre

$$\begin{aligned} a - b &= 3 \\ b + 2c &= 1 \\ a - 2c &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

bulunur. (2) denklem sisteminin çözümünü arayalım.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_1+R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \underset{(-1)R_2+R_3\to R_3}{\overset{1R_2+R_1\to R_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{-4}R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix} \underset{(-2)R_3+R_2\to R_2}{\overset{(-2)R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Buna göre $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ olmalıdır. □

MATRİSLER

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A matrisinin tersinir olduğunu gösteriniz ve tersini bulunuz.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$ olmak üzere. $ad-bc \neq 0$ ise A matrisinin çarpmaya göre tersinin bulunduğu ve

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

olduğu gösterilebilir. Burada verilen A matrisi için $ad-bc = 6+1 = 7$ dir. $ad-bc \neq 0$ olduğundan A^{-1} vardır ve $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dir. $\square$

2. $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ ve $AB = 0$ olacak biçimde A ve B matrisleri bulunuz.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & -16 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ olsun. $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ ve

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -16 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca görülmektedir. $\square$

3. A tersinir bir matris olsun. Bu durumda A matrisi ile sağdan çarpılabilir olan her B ve C matrisi için $AB = AC \Rightarrow B = C$ önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $AB = AC$ eşitliğinin her iki yanı soldan A^{-1} matrisi ile çarpılarak

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$$

bulunur. Matrislerde çarpma işleminin birleşme özelliği bulunduğundan

$$\left(A^{-1}A\right)B = \left(A^{-1}A\right)C$$

ve buradan $B = C$ elde edilir. $\square$

4. $(AC)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer denklem sisteminde A ve C nin tersinir matrisler olduğu ve

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olduğu biliniyor. $\mathbf{x}$ nedir?

Çözüm: $(AC)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eşitliğinin her iki yanı soldan A^{-1} matrisi ile çarpılarak

$$A^{-1}\,(AC)\,\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

ve buradan $C\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ bulunur. Bu eşitliğin her iki yanı soldan C^{-1} matrisi ile çarpılarak

$$\mathbf{x} = C^{-1}A^{-1}\mathbf{b}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\mathbf{x} = C^{-1}A^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 21 \end{bmatrix}$$

olur. □

5. $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

Her $p \in \mathbb{Z}^+$ için $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \cos p\theta & \sin p\theta \\ -\sin p\theta & \cos p\theta \end{bmatrix}$ olur mu?

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^3, A^{-3} ve $A^3 - 2A + I$ matrislerini hesaplayınız.

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) $p(x) = x - 3$ olduğuna göre $p(A)$ nedir?

(b) $p(x) = x^2 + 3x - 3$ olduğuna göre $p(A)$ nedir?

8. A matrisi, $A^2 - 3A + I = 0$ eşitliğini sağlayan bir kare matris olduğuna göre $A^{-1} = 3I - A$ olduğunu gösteriniz.

9. Bir matrisin bir satırındaki bütün bileşenler sıfır ise bu matrisin çarpmaya göre tersi bulunabilir mi?

10. Aynı basamaktan tersinir iki matrisin toplamı da tersinir olur mu?

11. Aşağıdaki eşitliklerin her biri için bu eşitliği doğrulayan X matrisi varsa bulunuz.

(a) $X\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $X\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

BİR MATRİSİN SATIRCA İNDİRGENMİŞ BASAMAK (EŞELON) FORMU

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -6 \\ -7 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin indirgenmiş satırca basamak formunu bulunuz.

Çözüm: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -6 \\ -7 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 6 & 0 & -6 \\ -7 & 3 & 13 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{7R_1+R_3\to R_3 \\ (-2)R_1+R_4\to R_4}}{\overset{(-6)R_1+R_2\to R_2}{\sim}}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & -12 & -24 \\ 0 & 17 & 34 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{(-6)R_4+R_2\to R_2 \\ 8R_4+R_3\to R_3}}{\overset{1R_4+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{2R_2+R_4\to R_4}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \square$$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 13 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin satırca indirgenmiş basamak formunu bulunuz.

Çözüm: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 13 & 3 \end{bmatrix} \underset{(-1)R_1+R_3\to R_3}{\overset{(-1)R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & -6 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 20 & 2 \end{bmatrix} \underset{(-2)R_2+R_3\to R_3}{\overset{1R_2+R_1\to R_1}{\sim}}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{(-\frac{1}{6})R_2\to R_2}{\overset{\frac{1}{2}R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \square$$

3. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ matrisinin indirgenmiş satırca basamak formunu bulunuz.

Çözüm: Önce $\cos\theta \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{\cos\theta}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \tan\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \overset{(\sin\theta)R_1+R_2\to R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \tan\theta \\ 0 & \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \tan\theta \\ 0 & \frac{1}{\cos\theta} \end{bmatrix} \overset{(\cos\theta)R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \tan\theta \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-\tan\theta)R_2+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

olur. Şimdi de $\cos\theta = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\sin\theta \neq 0$ olur. Buna göre

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{-\sin\theta}R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{\sin\theta}R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. □

4. $$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_3 - 4x_4 - 14x_5 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 + 35x_5 & = & 20 \\ x_2 - x_3 - 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 + 6x_3 + 3x_4 + 15x_5 & = & 18 \end{array}$$ *lineer denklem sistemini çözünüz.*

Çözüm: Verilen denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 & -14 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 8 & 35 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & 15 & 18 \end{bmatrix} \overset{(\frac{1}{2})R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & -2 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 8 & 35 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & 15 & 18 \end{bmatrix} \underset{(-3)R_1+R_4\to R_4}{\overset{(-1)R_1+R_2\to R_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 10 & 42 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 36 & 18 \end{bmatrix} \underset{(\frac{1}{9})R_4\to R_4}{\overset{(-1)R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -10 & -42 & -20 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-1)R_2+R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -10 & -42 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 40 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{(\frac{1}{10})R_3\to R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -10 & -42 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{10R_3+R_2\to R_2 \\ (-1)R_3+R_4\to R_4}}{\overset{2R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. En sağdaki satırca indirgenmiş basamak matrisinin gösterdiği lineer denklem sisteminde $x_5 = t$ ve $x_3 = k$ diyelim. $x_1 = 4 - 2k - t$, $x_2 = k + 2t$, $x_4 = 2 - 4t$ olur. Sonuç olarak verilen denklem sisteminin çözümü

$$x_1 = 4 - 2k - t,\;\; x_2 = k + 2t,\;\; x_3 = k,\;\; x_4 = 2 - 4t,\;\; x_5 = t$$

eşitlikleriyle belirlidir. □

5.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

denklem sistemini Gauss-Jordan yöntemiyle çözünüz.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 9 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. En sağdaki indirgenmiş satırca basamak matrisinin gösterdiği lineer denklem sisteminde $x_3 = t$ diyelim. $x_1 = 2 - 3t$, $x_2 = -3$, $x_4 = 0$ olur. Sonuç olarak verilen denklem sisteminin çözümü

$$x_1 = 2 - 3t,\;\; x_2 = -3,\;\; x_3 = t,\;\; x_4 = 0$$

eşitlikleriyle belirlidir. □

ELEMENTER MATRİSLER

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -7 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. PA matrisi indirgenmiş satırca basamak matris olacak biçimde bir P tersinir matrisi bulunuz.

Çözüm: $[A\ I_m]$ matrisini yazıp bu matrisi A matrisinin yerine indirgenmiş satırca basamak matris gelecek biçimde indirgeyeceğiz. Bunun sonucunda, I_m matrisinin yerine gelen matris, P matrisidir.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -7 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{1R_1+R_3 \to R_3}{\overset{1R_1+R_2 \to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{(-2)R_3+R_2 \to R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{2R_2+R_3 \to R_3}{\overset{(-4)R_2+R_1 \to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-1)R_3 \to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{1R_3+R_2 \to R_2}{\overset{(-3)R_3+R_1 \to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğundan $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $PA = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ dir.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{-1} matrisi varsa elementer satır işlemleriyle bulunuz.

Çözüm: $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{(-2)R_1+R_2 \to R_2}{\sim}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{1R_2+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{2R_3+R_2\to R_2}{\overset{2R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ dır. □

3. $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{-1} varsa bu matrisi elementer satır işlemlerinden yararlanarak bulunuz.

Çözüm: A matrisi ile I_3 matrisini yanyana, bir matris gibi ele alıp bu matrise denk olan indirgenmiş satırca basamak matrisini bulacağız.

$$[A\ I_3] = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{(-6)R_1+R_3\to R_3}{\overset{(-4)R_1+R_2\to R_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -11 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -26 & -19 & -6 & -6 & 1 \end{bmatrix} \overset{(-2)R_2+R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -11 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{4R_3+R_2\to R_2}{\overset{(-1)R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{(-4)R_2+R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -14 & 12 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-1)R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 14 & -12 & 15 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_3+R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -10 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 14 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $[A\ I_3] \sim \left[I_3\ A^{-1}\right]$ olduğundan A matrisinin çarpmaya göre tersi vardır ve

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -10 & 9 & -11 \\ 14 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

dır. □

4. I_4 matrisinde ikinci satır ile dördüncü satırın yerleri değiştirilerek elde edilen elementer matris E olsun. E matrisinin çarpmaya göre tersi var mıdır? Neden? A nın tersini,

$$(e(I_m))^{-1} = e^{-1}(I_m)$$

eşitliğinden yararlanarak bulunuz.

Çözüm: "I_4 matrisinde, ikinci satır ile dördüncü satırın yerlerini değiştirme" işlemini e ile gösterelim.

$$E = e(I_4) = e\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Her bir $e(I_m)$ elementer matrisinin tersinir bir matris olduğunu ve bu matrisin tersinin, $e^{-1}(I_m)$ elementer matrisi olduğunu göstermiştik. Buna göre E matrisinin tersi vardır ve $E^{-1} = e^{-1}(I_4)$ dır. e^{-1} işlemi, "ikinci satır ile dördüncü satırın yerlerinin değiştirilmesi" işlemidir. Öyleyse

$$E^{-1} = e^{-1}(I_4) = e^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. □

5. I_4 matrisinde, dördüncü satırın 5 katı birinci satıra eklenerek elde edilen elementer matris E olsun. E matrisinin çarpmaya göre tersi var mıdır? Neden? E nin tersini,

$$(e(I_m))^{-1} = e^{-1}(I_m)$$

eşitliğinden yararlanarak bulunuz.

Çözüm: "I_3 matrisinde, dördüncü satırın 5 katının birinci satıra eklenmesi" işlemi e ile gösterilsin.

$$E = e(I_3) = e\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Her bir $e(I_m)$ elementer matrisinin tersinir bir matris olduğunu ve bu matrisin tersinin, $e^{-1}(I_m)$ elementer matrisi olduğunu göstermiştik. Buna göre E matrisinin tersi vardır ve $E^{-1} = e^{-1}(I_4)$ dır. e^{-1} işlemi, "dördüncü satırın -5 katının birinci satıra eklenmesi" işlemidir. Öyleyse

$$E^{-1}=e^{-1}\left(I_3\right)=e^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

dır. □

6. I_3 matrisinde, üçüncü satırın -3 katı birinci satıra eklenerek elde edilen elementer matris P olsun. P matrisinin çarpmaya göre tersi var mıdır? Neden? P nın tersini bulunuz.

Çözüm: Soruda verilen elementer işlemi e ile gösterelim.

$$P=e(I_2)=\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

dir. $e(I_2)$ elementer matrisinin tersi $e^{-1}(I_2)$ matrisidir. e^{-1} işlemi, üçüncü satırın 3 katını birinci satıra eklemektir. Buna göre

$$P^{-1}=e^{-1}(I_2)=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

dir. □

7. I_4 matrisinde ikinci satır, sıfırdan farklı bir c sayısı ile çarpılarak elde edilen elementer matris E olsun. E matrisinin çarpmaya göre tersi var mıdır? Neden? E nın tersini,

$$\left(e\left(I_m\right)\right)^{-1}=e^{-1}\left(I_m\right)$$

eşitliğinden yararlanarak bulunuz.

Çözüm: "I_4 matrisinde, ikinci satırın sıfırdan farklı c sayısı ile çarpılması" işlemi e olsun.

$$E=e\left(I_3\right)=e\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

dır. Her bir $e\left(I_m\right)$ elementer matrisinin tersinir bir matris olduğunu ve bu matrisin tersinin, $e^{-1}\left(I_m\right)$ elementer matrisi olduğunu göstermiştik. Buna göre E matrisinin tersi vardır ve $E^{-1}=e^{-1}\left(I_4\right)$ dır. e^{-1} işlemi, "üçüncü satırın $\frac{1}{c}$ sayısı ile çarpılması" işlemidir. Öyleyse

$$E^{-1} = e^{-1}\left(I_3\right) = e^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. □

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ olsun. A matrisinin elementer matrislerin çarpımı olarak yazılabiliyorsa bu elementer matrisleri bulunuz. Bulduğunuz sonuca bakarak A matrisinin tersinir olup olmadığı söylenebilir mi?

Çözüm: $A \in \mathbb{K}_m^m$ olsun. A matrisi I_m matrisine satırca denk ise A matrisinin tersinir olduğunu ve elementer matrislerin çarpımı olarak yazılabildiğini biliyoruz. $e_1, e_2, \ldots, e_s$ elementer satır işlemleri olmak üzere $e_s e_{s-1} \ldots e_1 A = I_m$ olduğunu varsayalım. $e_1, e_2, \ldots, e_s$ elementer satır işlemlerine karşılık gelen elementer matrisler $E_1, E_2, \ldots, E_s$ olduğuna göre

$$E_s \cdot E_{s-1} \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I_m$$

ve buradan $A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_s^{-1}$ eşitliği bulunur. Elementer matrislerin çarpmaya göre terslerinin de elementer matris olduklarını biliyoruz. Şimdi, A matrisini indirgenmiş satırca basamak matrisine dönüştürürken her adımda kullanılan elementer satır işleminin matrisini de sağ yana yazacağız.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_2+R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad E_1 = e_1\left(I_2\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = e_2\left(I_2\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \overset{(-4)R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = e_3\left(I_2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad E_4 = e_4\left(I_2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \overset{(-1)R_2+R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad E_5 = e_5\left(I_2\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Demek ki, A matrisinin indirgenmiş satırca basamak biçimi, I_2 matrisidir. Buna göre A matrisi elementer matrislerin çarpımı olarak yazılabilir. $\left(e(I_m)\right)^{-1} = e^{-1}(I_3)$ olduğundan yararlanarak

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Sonuç olarak, A matrisi, elementer matrislerin çarpımı olarak

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} \cdot E_5^{-1}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitliğin doğruluğunu, sağ yandaki çarpımı hesaplayarak görebilirsiniz. A matrisi elementer matrislerin çarpımı olarak yazılabildiğinden tersinir matristir. $\square$

DETERMİNANTLAR

1. Aşağıdaki determinantları hesaplayınız.

(a) $\det\left[\begin{array}{c}-4\end{array}\right]$ **(b)** $\det\left[\begin{array}{c}7\end{array}\right]$ **(c)** $\det\left[\begin{array}{c}0\end{array}\right]$ **(ç)** $\det\begin{bmatrix}2 & -1\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ **(d)** $\det\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

(h) $\det\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$

Çözüm: **(a)** $\det\left[\begin{array}{c}-4\end{array}\right]=-4$ **(b)** $\det\left[\begin{array}{c}7\end{array}\right]=7$ **(c)** $\det\left[\begin{array}{c}0\end{array}\right]=0$

(ç) $\det\begin{bmatrix}2 & -1\\ 7 & 5\end{bmatrix}=2\cdot 5-7\cdot(-1)=17$ **(d)** $\det\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}=3\cdot 0-2\cdot 0=0$

(h) $\det\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}=0$

2. $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ ve $\det A=a$ olsun. Determinant fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak aşağıdaki determinantları, a sayısına bağlı olarak bulunuz.

(a) $\begin{vmatrix}a_{11} & 5a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & 5a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & 5a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix}3a_{11} & 3a_{12} & a_{13}\\ 3a_{21} & 3a_{22} & a_{23}\\ 3a_{31} & 3a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ **(c)** $\begin{vmatrix}3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13}\\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23}\\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33}\end{vmatrix}$

(ç) $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$ **(d)** $\begin{vmatrix}a_{11}+2a_{13} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+2a_{23} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+2a_{33} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ **(e)** $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}+3a_{11}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+3a_{21}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+3a_{31}\end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+7a_{11} & a_{32}+7a_{12} & a_{33}+7a_{13}\end{vmatrix}$ **(g)** $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+5a_{31} & a_{22}+5a_{32} & a_{23}+5a_{33}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

Çözüm: **(a)** $\begin{vmatrix}a_{11} & 5a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & 5a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & 5a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=5a$

(b) $\begin{vmatrix}3a_{11} & 3a_{12} & a_{13}\\ 3a_{21} & 3a_{22} & a_{23}\\ 3a_{31} & 3a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}a_{11} & 3a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & 3a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & 3a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=3\cdot 3\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=9a$

(c) $\begin{vmatrix}3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13}\\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23}\\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33}\end{vmatrix}=3\cdot 3\cdot 3\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=27a$

(ç) Bir kare matrisin transpozunun determinantı, kendisinin determinantına eşit olduğundan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a$$

olur.

(d) $$\begin{vmatrix} a_{11}+2a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+2a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+2a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a + 2\cdot 0 = a$$

(e) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+3a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+3a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+3a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a + 3\cdot 0 = a$$

(f) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+7a_{11} & a_{32}+7a_{12} & a_{33}+7a_{13} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a + 7\cdot 0 = a$$

(g) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+5a_{31} & a_{22}+5a_{32} & a_{23}+5a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a + 5\cdot 0 = a$$

dır. □

3. $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ ve $|A| = 4$ olmak üzere $\begin{vmatrix} 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 5a_1+2c_1 & 5a_2+2c_1 & 5a_3+2c_1 \\ b_1-5a_1 & b_2-5a_2 & b_3-5a_3 \end{vmatrix} =?$

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 5a_1+2c_1 & 5a_2+2c_2 & 5a_3+2c_3 \\ b_1-5a_1 & b_2-5a_2 & b_3-5a_3 \end{vmatrix} \overset{(-1)R_1+R_2\to R_2}{=} \begin{vmatrix} 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 5a_1 & 5a_2 & 5a_3 \\ b_1-5a_1 & b_2-5a_2 & b_3-5a_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{1R_2+R_3\to R_3}{=} \begin{vmatrix} 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 5a_1 & 5a_2 & 5a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{=} 2\cdot 5 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{=} 2\cdot 5 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 4 = 40$$

tır. $\square$

4. $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ ve $|A| = -1$ olmak üzere $\begin{vmatrix} c_1 & 3c_2-2c_3 & c_1+4c_3 \\ b_1 & 3b_2-2b_3 & b_1+4b_3 \\ a_1 & 3a_2-2a_3 & a_1+4a_3 \end{vmatrix} = ?$

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} c_1 & 3c_2-2c_3 & c_1+4c_3 \\ b_1 & 3b_2-2b_3 & b_1+4b_3 \\ a_1 & 3a_2-2a_3 & a_1+4a_3 \end{vmatrix} \overset{(-1)S_1+S_3\to S_3}{=} \begin{vmatrix} c_1 & 3c_2-2c_3 & 4c_3 \\ b_1 & 3b_2-2b_3 & 4b_3 \\ a_1 & 3a_2-2a_3 & 4a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 4\cdot \begin{vmatrix} c_1 & 3c_2-2c_3 & c_3 \\ b_1 & 3b_2-2b_3 & b_3 \\ a_1 & 3a_2-2a_3 & a_3 \end{vmatrix} \overset{2S_3+S_2\to S_2}{=} 4\cdot \begin{vmatrix} c_1 & 3c_2 & c_3 \\ b_1 & 3b_2 & b_3 \\ a_1 & 3a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 4\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_3}{=} 4\cdot 3\,(-1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -12. \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 12$$

dir. $\square$

5. Determinant fonksiyonunun özelliklerinden ve $\det(I_n) = 1$ olduğundan yararlanarak aşağıdaki determinantları hesaplayınız.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(ç) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(d)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Çözüm: **(a)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(-7)R_4+R_2\to R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{R_2\leftrightarrow R_4}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

(ç) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = c$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(-c)R_3+R_2\to R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

6. $c_{ij} \in \mathbb{K}$ olduğuna göre aşağıdaki determinantları determinant fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak bulunuz.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Çözüm: (**a**) Bu determinant, bir üst üçgen matrisin determinantıdır. Üst üçgen matrisin determinantı, köşegenindeki bileşenlerinin çarpımına eşittir. Buna göre verilen determinant, 1 sayısına eşittir.

(**b**) Bu determinant, bir alt üçgen matrisin determinantıdır. Alt üçgen matrisin determinantı, köşegenindeki bileşenlerinin çarpımına eşittir. Buna göre verilen determinant, 1 sayısına eşittir.

7. $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$, $\det A = a$ ve $b_{ij} \in \mathbb{K}$ olsun. Determinant fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{21} & b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantını a sayısına bağlı olarak bulunuz.

Çözüm: A matrisi $m \times m$ biçiminde bir matris, B matrisi $m \times (n-m)$ biçiminde bir matris, C matrisi $(n-m) \times (n-m)$ biçiminde bir matris ve 0 matrisi de $(n-m) \times m$ biçimindeki sıfır matrisi ise

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}_{n \times n} = (\det A)(\det C)$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{21} & b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 = a$$

dır. □

8. $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$, $\det A = a$ ve $b_{ij} \in \mathbb{K}$ olsun. Determinant fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

determinantını a sayısına bağlı olarak bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a$$

dır. $\square$

9. Determinant fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak

$$\det\begin{bmatrix} b & a & b & b & a \\ a & b & b & a & b \\ b & b & a & b & a \\ b & a & b & a & b \\ a & b & a & b & b \end{bmatrix} = (2a+3b)(a-b)^4$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Verilen matrisin sütunlarını $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$ ile satırlarını R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 ile gösterelim.

$$\begin{bmatrix} b & a & b & b & a \\ a & b & b & a & b \\ b & b & a & b & a \\ b & a & b & a & b \\ a & b & a & b & b \end{bmatrix} \begin{array}{c} {\scriptstyle 1\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_1\to\mathbf{a}_1} \\ = \\ {\scriptstyle 1\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_1\to\mathbf{a}_1} \\ {\scriptstyle 1\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_1\to\mathbf{a}_1} \\ {\scriptstyle 1\mathbf{a}_5+\mathbf{a}_1\to\mathbf{a}_1} \end{array} \begin{vmatrix} 2a+3b & a & b & b & a \\ 2a+3b & b & b & a & b \\ 2a+3b & b & a & b & a \\ 2a+3b & a & b & a & b \\ 2a+3b & b & a & b & b \end{vmatrix} \begin{array}{c} {\scriptstyle (-1)R_1+R_2\to R_2} \\ = \\ {\scriptstyle (-1)R_1+R_3\to R_3} \\ {\scriptstyle (-1)R_1+R_4\to R_4} \\ {\scriptstyle (-1)R_1+R_5\to R_5} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2a+3b & a & b & b & a \\ 0 & b-a & 0 & a-b & b-a \\ 0 & b-a & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & b-a \\ 0 & b-a & a-b & 0 & b-a \end{vmatrix} \begin{array}{c} {\scriptstyle (-1)R_2+R_3\to R_3} \\ = \\ {\scriptstyle (-1)R_2+R_5\to R_5} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2a+3b & a & b & b & a \\ 0 & b-a & 0 & a-b & b-a \\ 0 & 0 & a-b & b-a & a-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b & b-a \\ 0 & 0 & a-b & b-a & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} {\scriptstyle (-1)R_3+R_5\to R_5} \\ = \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2a+3b & a & b & b & a \\ 0 & b-a & 0 & a-b & b-a \\ 0 & 0 & a-b & b-a & a-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = (2a+3b)(a-b)^4$$

olur.

10. Doğruca hesaplamadan

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Determinant fonksiyonunun özelliklerini kullanarak

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{1R_2+R_1\to R_1}{=} \begin{vmatrix} b+c+a & c+a+b & b+a+c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-a-b-c)R_3+R_1\to R_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

bulunur. Bir satırı (veya bir sütunu) sıfır olan determinantın sıfır sayısına eşit olduğunu biliyoruz. Buna göre son bulunan determinant sıfır sayısına eşittir.

11. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A matrisinin ek (adjoint) matrisini bulunuz. $\widetilde{A} \cdot A$ ve $A \cdot \widetilde{A}$ çarpımlarını hesaplayınız.

Çözüm: $A_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^2 (1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = 2$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^3 (4 - 0) = -4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^4 (2 - 0) = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^3 (3 \cdot 2 - 1 \cdot 4) = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^4 (-2 - 0) = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^5 (-1) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^4 (0 - 4) = -4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^5 (0-8) = 8$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^6 (-1-6) = -7$$

olduğundan

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

dir. $\widetilde{A} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = (\det A)\, I_3$

$$A \cdot \widetilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = (\det A)\, I_3$$

olur. □

12. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{-1} matrisinin varlığını gösteriniz. Sonra A matrisinin adjoint (ek) matrisinden yararlanarak bulunuz.

Çözüm: $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (-1)\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dır. $\det A \neq 0$ olduğundan A matrisinin tersi vardır.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

olduğundan

$$A^{-1} = \tfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{3} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. □

13. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{-1} matrisinin varlığını gösteriniz. Sonra A matrisinin adjoint (ek) matrisinden yararlanarak $A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 14 \end{bmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

14. Aşağıda verilen matrislerde hangi k sayıları için A matrisi tekil (singular) matris olur?

(a) $\begin{bmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k+1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

15. A ve B, $n \times n$ türünde matrisler ve A tersinir matris ise $\det B = \det\left(A^{-1}BA\right)$ olduğunu gösteriniz.

CRAMER KURALI

1. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -1 \\ 3x_1 + 5x_2 &= -2 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini Cramer yöntemiyle çözünüz.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi A olsun.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

dir. $\det A \neq 0$ olduğundan verilen denklem sistemi Cramer sistemidir. Öyleyse

$$x_1 = \tfrac{1}{-1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -(-1) = 1, \qquad x_2 = \tfrac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(1) = -1$$

dir. $\square$

2. $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= -9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= -14 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini Cramer yöntemiyle çözünüz.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi A olsun.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 4(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot (-14) + (-3)(-1)(-4) + 1(-6) = -74$$

dır. $\det A \neq 0$ olduğundan verilen denklem sistemi Cramer sistemidir. Öyleyse

$$x_1 = \tfrac{1}{-74} \begin{vmatrix} -9 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -14 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{-74} \cdot 74 = -1, \quad x_2 = \tfrac{1}{-74} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{-74} \cdot (-148) = 2,$$

$$x_3 = \tfrac{1}{-74} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{-74} \cdot (-74) = 1$$

dir. $\square$

3. $\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 12 \\ 3x + z &= 16 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini Cramer yöntemiyle çözünüz.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi A olsun.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (3-0) + 5(-1)\,(1-6) + 2(0-9) = 9 + 25 - 18 = 16$$

dır. $\det A \neq 0$ olduğundan verilen denklem sistemi Cramer sistemidir. Öyleyse

$$x_1 = \tfrac{1}{16}\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 12 & 3 & 2 \\ 16 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{16}\left[4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 16 & 0 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \tfrac{1}{16}.16 = 1$$

$$x_2 = \tfrac{1}{16}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 12 & 2 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{16}\left[3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 16 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \tfrac{1}{16}\cdot(-80) = -5$$

$$x_3 = \tfrac{1}{16}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 12 \\ 3 & 0 & 16 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{16}\left[3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 16 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \tfrac{1}{16}\cdot(208) = 13$$

dır. □

4. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini Cramer yöntemiyle çözünüz.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi A olsun.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

dır. $\det A \neq 0$ olduğundan verilen denklem sistemi Cramer sistemidir. Öyleyse

$$x_1 = \tfrac{1}{-2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{-2}\cdot(-2) = 1$$

$$x_2 = \tfrac{1}{-2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{-2}(0) = 0$$

$$x_3 = \tfrac{1}{-2}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{-2}\cdot(2) = -1$$

$$x_4 = \tfrac{1}{-2}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{-2}(0) = 0$$

dir. □

5. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -4x_1 + ax_2 - 8x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$ lineer denklem sisteminin bir tek çözümünün bulunduğu bilindiğine göre a sayısı için ne söylenebilir?

Çözüm: Verilen denklem sistemi karesel bir lineer denklem sistemidir. Bir tek çözümünün bulunması için gerekli ve yeterli koşul, katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & a & -8 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & -8 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(-a-8) + (-1)(-1)\,(4+8) + 4(4-a) = 12 - 6a$$

dır. Verilen lineer denklem sisteminin bir tek çözümü bulunduğundan $\det A \neq 0$ dır. Buna göre $a \neq 2$ dir. □

6. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{array}{r} (k-3)\,x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + (k-3)\,x_2 = 0 \end{array}$ (1) lineer denklem sistemi veriliyor.

k sayısının hangi değerleri için (1) denklem sisteminin sıfır çözümündan farklı çözümleri vardır? Bu çözümleri bulunuz.

Çözüm: $\det \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 6k + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k_1 = 1,\ k_2 = 5)$

olduğundan $k_1 = 1$ ve $k_2 = 5$ sayıları için (1) denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı çözümleri vardır.

$k_1 = 1$ için (1) denklem sistemi

$$\begin{array}{r} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \qquad (2)$$

biçimine girer.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-\frac{1}{2})R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{2R_1 + R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan (2) denklem sisteminin çözümü $x_1 = -t,\ x_2 = t$ dir.

$k_2 = 5$ için (1) denklem sistemi

$$\begin{array}{r} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \qquad (3)$$

biçimine girer.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{2R_1 + R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan (3) denklem sisteminin çözümü $x_1 = t,\ x_2 = t$ dir. □

7. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{array}{r} (k-3)\,x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (k-3)\,x_2 = 0 \end{array}$ (1) lineer denklem sistemi veriliyor.

k sayısının hangi değerleri için (1) denklem sisteminin sıfır çözümündan farklı çözümleri vardır? Bu çözümleri bulunuz.