1.5.2 Homojen Diferansiyel Denklemler

$$y' = f(x, y)$$

denkleminde $f(x, y)$ fonksiyonu değişkenlerine göre sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyon, yani her reel λ için

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

ise denkleme homojendir denir. Bu bağıntıda $\lambda = 1/x$ konursa, sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyonu aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$f(x, y) = f(1, \frac{y}{x}) = g(\frac{y}{x}).$$

O halde birinci mertebe homojen bir denklem

$$y' = g(\frac{y}{x}) \tag{1.10}$$

biçimindedir. Örneğin,

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{1.11}$$

denkleminde P ve Q fonksiyonları x ve y nin aynı dereceden (örneğin m. derece) homojen fonksiyonları ise, yani

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$$

bağıntısını sağlıyorsa bu denklem herzaman (1.10) biçiminde yazılabilir. (1.10) diferansiyel denklemi $y = xu$ değişken dönüşümü ile değişkenleri ayrılabilir bir diferansiyel denkleme dönüştürülerek çözülebilir. Gerçekten, bu dönüşüm (1.10) denklemine uygulanırsa

$$xu' + u = g(u)$$

biçiminde değişkenleri ayrılabilir bir denkleme dönüşür. Bu denklemi değişkenlerine ayırır ve integre edersek

$$\int \frac{du}{u - g(u)} + \ln x = c \tag{1.12}$$

elde ederiz. Yukarıdaki belirsiz integral $h(u)$ ile gösterilirse genel çözüm

$$h(\frac{y}{x}) + \ln x = c \tag{1.13}$$

biçiminde olur. Yine burada $g(u) \not\equiv u$ varsayılmıştır. Eğer $g(u)-u=0$ cebirsel denkleminin reel çözümleri varsa, bunlar diferansiyel denklemin özel çözümlerini verir. $g(u)-u=0$ denkleminin reel kökleri $u=\lambda_i$ $(i=1,2,\ldots)$ olsun. O zaman, orijinden geçen $y=\lambda_i x$ doğruları diferansiyel denklemin özel çözümleri olur.

Şimdi homojen denklemlere ilişkin aşağıdaki önemli özeliği verelim.

Benzerlik Özeliği:
x ve y sıfırdan farklı aynı λ sabiti ile çarpılırsa homojen denklemin her bir çözümü başka bir çözüme dönüşür. Gerçekten, $\tilde{x}=\lambda x$ ve $\tilde{y}=\lambda y$ dönüşümü ile y' ve y/x büyüklükleri değişmez kalır, yani (1.10) denklemi $(\tilde{x},\tilde{y})$ koordinatlarında aynı yapıda olur. Ayrıca, (1.13) çözüm ailesi yine aynı dönüşüm altında değişmez kalır, fakat c sabiti farklı bir değer alır. O halde, integral eğrileri orijine göre birbirinin benzeridir. Böyle eğrilere homotetik eğriler denir.

Örnek 1.7 $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0.$

Bu denklemde $u=y/x$ için $g(u)=u+\sqrt{1+u^2}$ yazılabildiğinden homojendir. O halde $y=xu$ dönüşümü uygulanır ve x ile bölünürse

$$(u+\sqrt{1+u^2})\,dx - (u\,dx + x\,du) = 0$$

bulunur. Değişkenlere ayırır ve integre edersek

$$-\int \frac{dx}{x} + \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\ln x + \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln c,$$

yani

$$cx = u + \sqrt{1+u^2}$$

bulunur. Bu sonuca $u-\sqrt{1+u^2} = -1/cx$ bağıntısını eklersek

$$2u = cx - \frac{1}{cx}$$

elde ederiz. Sonuç olarak, $u=y/x$ yazılır ve terimler düzenlenirse

$$2cy - c^2x^2 + 1 = 0$$

genel çözümüne varılır. Dönüşüm $y'=g(y/x)$ denklemine doğrudan uygulanabilirdi.

Örnek 1.8 $(x^2+y^2) - 2xyy' = 0.$

$y = ux$ dönüşümü ile bu homojen denklem

$$1 + u^2 - 2u(xu' + u) = 0$$

olur. Değişkenleri ayırır ve integre edersek

$$\int \frac{2u}{u^2-1}du + \int \frac{dx}{x} = c,$$

$$\ln|u^2 - 1| + \ln|x| = \ln c$$

çıkar. Bu sonuç x ve y değişkenleri ile yazılırsa genel çözüm

$$x^2 - y^2 = Cx, \quad C = \pm c \tag{1.14}$$

eğri ailesi (hiperboller) olarak elde edilir. $u^2 - 1 = 0$ denkleminin reel kökleri $u_1 = 1$ ve $u_2 = -1$ olduğundan $y = \pm x$ doğruları özel çözüm olur. Bu çözümlerin (1.14) genel çözümünden $C = 0$ koyarak elde edilebileceği açıktır.

Parabolik Yansıtıcı Problemi:

Örnek 1.9 *Sabit bir kaynaktan çıkan ses ya da ışın düzlemsel bir eğriye çarparak x-eksenine paralel olarak yansımaktadır (odak özeliği). Böyle bir eğrinin biçimini belirleyiniz?*

Kaynağın orijinde olduğunu varsayalım. Eğri üzerindeki bir $P(x, y)$ noktasından çizilen teğetin x-ekseni ile yaptığı açı α olsun. Kaynağı P noktasına birleştiren ışının kutup açısı θ ile gösterilsin. Gelen ışının bu teğet ile yaptığı açı β ise, yansıma yasasına göre $\alpha = \beta$ dır. Ayrıca, $\theta = \alpha + \beta = 2\alpha$ bağıntısından

$$\tan\theta = \tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-y'^2}$$

bulunur. Bu bağıntıdan y' çözülürse yansıtıcı eğrinin diferansiyel denklemi

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

olur. Bu homojen bir diferansiyel denklemdir ve $y = xu$ dönüşümü ile

$$(xu' + u)xu = -x \pm x\sqrt{1+u^2}$$

ve değişkenleri ayırarak ($+$ işareti seçiliyor)

$$\frac{u\,du}{u^2+1-\sqrt{u^2+1}} + \frac{dx}{x} = 0$$

elde ederiz. $v^2 = u^2 + 1$ dönüşümü ile

$$\frac{dv}{v-1} + \frac{dx}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad |x(v-1)| = C$$

integral eğrileri bulunur. İlk değişkenlere dönülürse, aranan eğri

$$x^2v^2 = x^2(u^2+1) = (x+C)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2Cx + C^2$$

parabol ailesi olur. Odak özeliğine sahip eğriler yalnızca parabollerdir.

Çözülecek Problemler

Aşağıdaki homojen diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$
2. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$
3. $x^2\cos\frac{x}{y}\,y' - (y^2 + xy\cos\frac{x}{y}) = 0$
4. $xy^2\,dy = (x^3+y^3)\,dx$
5. $(2\sqrt{xy} - y)\,dx + x\,dy = 0$
6. $(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}e^{y/x})\,dx + (\frac{1}{x}e^{y/x} - \frac{1}{y})\,dy = 0$
7. $xyy' = y^2 - x\sqrt{x^2+y^2}$
8. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y^2}$
9. $(y+x)\,dx + (y-x)\,dy = 0$
10. $y' = \frac{2y^4+x^4}{xy^3}$
11. $e^{x/y}(y-x)\,dy + y(1+e^{x/y})\,dx = 0$
12. $(\sqrt{x^2-y^2} - y)\,dx + x\,dy = 0$
13. $(x^2 - xy + y^2)\,dx + x^2\,dy = 0$
14. $(y+2x)\,dx - y\,dy = 0$