Cebir Notları

Ali ERGİN, Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Saymanın Temel Prensibi

Matematikle ilk tanışmamız sayı saymayla başlamıştır desek sanırım yanılmış olmayız. Daha 2 yaşında bir bebek, 1, 2, 3, 4, … diye en azından 10'a kadar sayabilir. Bunların birer rakam olduğunu bile bilmeden… Çünkü ''sıfır''ı bilen bebek görmedim ben. Biraz büyüdükçe, artık sayıları değil nesneleri saymaya başlar. 3 elma, 2 araba, 4 kitap diye… Bizim ''saymak'' dediğimiz şey bu kadar basit değil! Bu dersimizin başında önce saymayı öğreneceğiz.

Sonsuza kadar saymayı bilen bir adam bile bazen bazı şeyleri sayamaz. En azından buna ömrü izin vermez. Demek sayı saymayı bilen herkes her zaman nesneleri sayabilir diyemeyiz. Nesneler sonlu miktarda olsalar bile!

Sayma için bilinen 3 farklı metot vardır:

i. *Eşleme yoluyla sayma*
ii. *Toplama yoluyla sayma*
iii. *Çarpma yoluyla sayma*

İlk ikisi zaten günlük hayatta da kullandığımız sayma yöntemleridir. Birilerinin bunları kullanarak nesneleri sayması, onun matematik bildiği anlamına gelmez. Ama üçüncü şıktaki saymayı bilmiyorsan, aslında saymayı bilmiyorsundur. Şimdi sırasıyla bunları öğreneceğiz.

Eşleme Yoluyla Sayma. Bir sınıftaki öğrenci sayısını, bir apartmanın kaç katlı olduğunu, bir pakette kaç sigara bulunduğunu, sonlu bir kümenin eleman sayısını filan belirlemek için söz konusu elemanları sayma sayıları ile birebir eşlemeye *eşleme yolu ile sayma* denir. Örneğin, kitabın ilk sayfasına ''1'', ikinci sayfasına ''2'', üçüncü sayfasına ''3'', … gibi isim vererek, o kitapta kaç sayfa olduğunu bulabiliriz. Zaten başka yolu da yoktur. Bu işlem en temel sayma işlemidir. Ama bu her zaman geçerli bir yol değildir. Aslında geçerlidir de elverişli değildir desek daha doğru olur. Yüz kenarlı bir çokgenin tüm köşegenlerinin kaç adet olduğu sorulsa mesela n'apacaksın? Diyelim inat ettin, yüzgeni çizdin, tüm köşegenlerini de çizip bismillah deyip saymaya başladın. Ya yüzgen değil, bingen olsa veya milyongen? Olamaz mı, sen inat edersin de ben edemem mi? O halde saymanın başka yolları da olmalı. Yoksa biz sayamıyoruz diye orada köşegen yok demek değil!

Rakamları veya sayıları yazıp okuyamayan çobanlar bile koyunlarının eksik olup olmadığını henüz adı bile konulmamış "birebir eşleme metodu" dediğimiz bu yöntemle kontrol ediyorlardı. Ceplerine doldurdukları bir miktar çakıl taşını kullanarak. Her bir koyunu ahırından dışarı çıkarırken cebine bir çakıl taşı koyup, akşam döndüğünde de ahıra giren her koyun için cebindeki bir çakıl taşını çıkarıyordu. Matematikçiler çobandan etkilenmiş olacaklar ki yıllar sonra birebir eşleme metodunu geliştirmişlerdir. Hatta bazı matematikçiler bu yönteme çoban sayması demeyi sürdürmektedirler. Bu örnekte çoban koyunlarını saymıyor aslında bire bir eşleme ile eksilme veya artmanın olup olmadığını kontrol ediyor.

Matematikçiler çakıl taşları yerine sayma sayıları kümesini geliştirmiş ceplerindeki ağırlıktan kurtulmuşlar. Sayma sayılarının her bir elemanının sırayla başka bir kümenin elemanıyla eşleştirme işlemine "birebir eşleme ile sayma metodu" diye tabir edilir.

Aşağıda vereceğimiz ikinci sayma metodu da bu derdimize derman olmayacak ama çözümlerimizde bunu kullanacağız.

Toplama Yoluyla Sayma. A ve B ayrık iki küme olsun, yani kesişimleri boşküme olsun. A ve B kümelerinin toplam kaç elemanı olduğunu bulmak için $A \cup B$ kümesinin elemanlarını saymalıyız, ki o da $s(A) + s(B)$'dir. Örneğin, bir sınıftaki öğrenci sayısını eşleme yoluyla tek tek sayabileceğimiz gibi, eğer biliniyorsa sınıftaki kız öğrenciler kümesinin eleman sayısı ile sınıftaki erkek öğrencilerin eleman sayılarını toplayarak da sonuca ulaşabiliriz. Örneğin, bu sınıfta 22 kız öğrenci ve 23 erkek öğrenci varsa, bu sınıfta 22 + 23 = 45 öğrenci vardır deriz. İşte buna *toplama yoluyla sayma işlemi* denir.

Örnek. *A kentinden B kentine 40 farklı karayolu ve 20 farklı demiryolu vardır. A'dan B'ye gitmek isteyen birinin kaç farklı seçeneği vardır?*

A) 2 B) 60 C) 80 D) 800 E) 40^{20}

Çözüm: Bu kadar farklı yol olur mu ya demeyin. Senelerdir ders anlatırım, herkes A'dan B'ye veya B'den A'ya gidiyor, bu kadar farklı yolu tabii yaparlar. ☺
40 + 20 = 60 farklı yol olduğundan, bu ''biri'' 60 farklı şekilde A'dan B'ye gider.

Doğru cevap: B.

Örnek. $|x + 1| < 3$ *eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $-3 < x + 1 < 3$ olduğundan $-4 < x < 2$ olur. Bu eşitsizlikleri sağlayan x tamsayıları

$$\{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

olmak üzere 5 tanedir. Sabaha kadar mutlak değer bil, saymayı bilmiyorsan 5'i bulamazsın!☺

Doğru cevap: C.

Çarpma Yoluyla Sayma. A, B, C boş kümeden farklı birer sonlu küme olmak üzere; A ve B kümelerinden sırasıyla birer eleman seçerek oluşturulabilecek bütün sıralı ikililerin sayısını

$$s(A\times B) = s(A)\cdot s(B)$$

veya A, B, C kümelerinden birer eleman seçerek oluşturulabilecek bütün sıralı üçlülerin sayısını

$$s(A\times B\times C) = s(A)\cdot s(B)\cdot s(C)$$

şeklinde çarpma işlemi yaparak buluruz.

İşte bu çarpma yolu ile sayma kuralı, eşleme veya toplama kuralı ile saatler, belki de bir ömür alacak toplamları birkaç saniyede bizim için yapar. İlerde farklı örneklerini göreceksiniz.

Matematikçiler üçe ayrılır:
Sayı saymayı bilenler ve bilmeyenler!

Saymanın Temel İlkesi. Sonuç olarak ayrık r tane işten,

1'incisi n_1 değişik yoldan,
2'ncisi n_2 değişik yoldan,
…
r'nincisi n_r değişik yoldan

gerçekleştirilebiliyorsa; bu r tane işten her biri

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r$$

değişik yoldan gerçekleştirilebilir ve bu şekilde sayma işlemine **toplama kuralı** denir.

Bu r tane işin hepsi birlikte, sıralı bir biçimde

$$n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ldots\cdot n_r$$

değişik yoldan gerçekleştirilebilir ve bu şekildeki sayma işlemine **genel çarpım kuralı** veya **saymanın temel ilkesi** denir.

Örneğin, 3 farklı gömleği, 4 farklı pantolonu olan biri kendine $3\cdot 4 = 12$ değişik kıyafet yapabilir. Buna bir de 5 farklı kravat eklediğinizi düşünün. $3\cdot 4\cdot 5 = 60$ farklı kıyafet olur.

Örnek. *Adana'dan Ankara'ya* 3, *Ankara'dan İstanbul'a* 4 *farklı yol bulunmaktadır.*

$$\text{Adana} \rightrightarrows \text{Ankara} \rightrightarrows \text{İstanbul}$$

i. *Adana'dan İstanbul'a kaç farklı gidiş seçeneği vardır?*

Adana'dan Ankara'ya giden yollardan herhangi birini seçin. Hala Ankara'dan İstanbul'a gitmek için önünüzde 4 seçenek var. Ve bu diğer iki Adana-Ankara yolu seçimi için de geçerlidir.
Dolayısıyla $3\cdot 4 = 12$ farklı yoldan gidilebilir.

ii. *İstanbul'dan Adana'ya kaç farklı dönüş seçeneği vardır?*

Dönüş için de aynı olay geçerlidir. Ha $3\cdot 4$, ha $4\cdot 3$.
Bu yüzden yine 12 farklı yoldan dönülebilir.

iii. *Adana'dan İstanbul'a kaç farklı gidiş-dönüş seçeneği vardır?*

Her 12 gidişin, 12 dönüş seçeneği olduğundan, gidiş-dönüş için $12\cdot 12 = 144$ farklı yol vardır.

iv. *Adana'dan İstanbul'a giden bir aracın, Adana'ya dönerken daha önceden kullandığı yolu kullanmamak üzere kaç farklı dönüş seçeneği vardır?*

Hangisi kullanıldı bilinmez ama Adana'dan Ankara'ya ve Ankara'dan İstanbul'a gidilen yollardan biri kullanıldı. Dolayısıyla İstanbul'dan Ankara'ya kullanılmadık 3, Ankara'dan Adana'ya 2 yol kaldı. $3\cdot 2 = 6$ dönüş seçeneği vardır.

Örnek. *A'dan B'ye* 2, *B'den C'ye* 4 *farklı yol bulunmaktadır. C'den A'ya dönüş için* 5 *farklı yol vardır. Soru bu ya, yollar tek yönlüdür. Yani gidiş yollarıyla dönüş yolları tamamen farklı. Bu şartlar altında A'dan B'ye uğramak kaydıyla C'ye gidip, geri A'ya dönmek isteyen birinin önünde kaç değişik seçenek vardır?*

A) 11 B) 13 C) 22 D) 40 E) 64

Çözüm: Şimdi kim oturup da şehir çizecek, sonra şehirleri birbirine bağlayan yollar çizecek? Biz derdimizi kutu çizerek halledelim. Aslında kutu bile çizmesek de olur ama ilerde çok işimize yarayacak bu iş. A'dan B'ye gitmeye bir kutu, B'den C'ye gitmeye bir kutu, C'den geri A'ya dönmeye de bir kutu olmak üzere toplam 3 kutu çizelim.

$$\boxed{2}\boxed{4}\boxed{5}$$

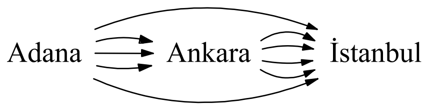
Demek ki, bu adamın önünde 40 farklı seçenek varmış. Çok kullanacağımız bu yönteme biz **kutu yöntemi** diyeceğiz.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Adana'dan Ankara'ya* 3, *Ankara'dan İstanbul'a* 4 *farklı karayolu bulunmaktadır. Ayrıca, Adana'dan İstanbul'a iki farklı demiryolu seçeneği de bulunduğuna göre, bir kimse kaç farklı şekilde Adana'dan İstanbul'a gidebilir?*

A) 9 B) 12 C) 13 D) 14 E) 28

Çözüm: Gidilebilecek yolları aşağıdaki şemada gösterdim.

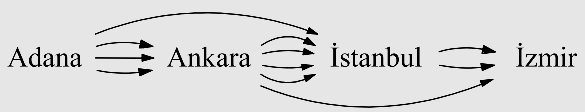


Şemaya göre bir adam yolun bir kısmını karayoluyla bir kısmınıysa demiryoluyla gidemez. Ya hep karayolunu, ya da hep demiryolunu kullanmak zorundadır. Bu durumlar ayrık olduğuna göre eleman sayılarını toplamamız icap eder.

Karayollarıyla $3 \cdot 4 = 12$ gidiş seçeneği olduğunu daha önce hesaplamıştık. 2 de demiryolu ilave edildiği için $12 + 2 = 14$ seçenek mevcuttur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Adana'dan Ankara'ya* 3, *Ankara'dan İstanbul'a* 4, *İstanbul'dan İzmir'e de* 2 *farklı karayolu bulunmaktadır. Bunların dışında Ankara'ya uğramadan Adana'dan İstanbul'a bir yol ve İstanbul'a uğramadan Ankara'dan İzmir'e bir yol bulunmaktadır.*



Buna göre Adana'dan İzmir'e gitmek isteyen biri bunu kaç değişik şekilde yapabilir?

A) 29 B) 30 C) 48 D) 87 E) 145

Çözüm: Bu soruda ayrık kümelere iyi karar vermek zorundayız. Adana'yı direkt olarak İstanbul'a bağlayan yola *birinci özel yol*, Ankara'yı direkt olarak İzmir'e bağlayan yola *ikinci özel yol* adını verelim. Adana'dan İzmir'e giden biri iki özel yolu birden kullanmış olamaz. O halde bu özel yollardan ya sadece birini kullanmıştır ya da ikisini de kullanmamıştır. Hiçbir özel yolu kullanmayan yol sayısı $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ olup, birinci özel yolu kullanan 2, ikinci özel yolu kullanan 3 farklı güzergah olduğundan $24 + 2 + 3 = 29$ değişik durum mümkündür.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir mobilya satıcısında 9 tip koltuk takımı ve 5 tip sehpa takımı vardır. Bir koltuk ve bir sehpa takımı alacak olan bir kimse için kaç tane koltuk-sehpa takımı seçeneği vardır?*

A) 14 B) 45 C) 90 D) 9^5 E) 5^9

Çözüm: Alıcı koltuk takımını 9 değişik biçimde seçebilir. Bu seçimlerden her biri için sehpa takımını da 5 değişik biçimde seçebileceğinden bir koltuk-sehpa takımını $9 \cdot 5 = 45$ biçimde seçer.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Her gün kravat takan bir A şahsının* 4 *farklı kravatı vardır. Ardı ardına iki gün aynı kravatı takmayan A şahsı, hafta içi kaç farklı şekilde kravat takabilir?*

A) 324 B) 323 C) 243 D) 242 E) 81

Çözüm: Sakın bu soruya Pazartesi 4, diğer günler de 3 seçeneği olduğundan $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$ demeyin… Bu adam her gün kravat taktığına göre Pazar günü de bir kravat taktı, o halde Pazartesi için de 3 seçeneği vardır. O halde cevap $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İki zar ile bir madeni para birlikte atıldığında kaç farklı durum oluşabilir?*

A) 14 B) 18 C) 36 D) 72 E) 216

Çözüm: İki tane zarlar için, bir tane de para için olmak üzere 3'lü kutu yapacağız. Zarların 6'şar, paranın ise 2 yüzü olduğunu unutmayın. İki yüzlü şeyleri sevmeyin! Ya para veya zarlardan biri dik gelirse geyiğini de yapmayın!

$$\boxed{6}\boxed{6}\boxed{2}$$

$6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ olduğundan 72 farklı durum vardır.

Doğru cevap: D.

Örnek. 5 *kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden kaç farklı şekilde sonuçlanabilir?*

A) 5 B) 10 C) 25 D) 32 E) 125

Çözüm: Sadece 1 kişi için kaç farklı seçenek var, ona bir bakalım. Ya başarılı olacak, ya başarısız. Yani 2 seçenek var. O halde 5 kişi için

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

farklı seçenek vardır.

Doğru cevap: D.

Örnek. 20 *soruluk bir sınavda, her sorunun* 4 *yanlış ve bir doğru olmak üzere* 5 *seçeneği vardır. Bu sınavın cevap anahtarı hazırlanacaktır. Kaç farklı cevap anahtarı oluşturulabilir?*

A) 20! B) 5! C) 100 D) 5^{20} E) 20^5

Çözüm: Her soru için 5 farklı seçenek var olup, toplamda 20 soru olduğundan cevap $5·5·5· … ·5 = 5^{20}$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. 20 *soruluk bir sınavda, her sorunun* 4 *yanlış ve bir doğru olmak üzere* 5 *seçeneği vardır. Bu sınavın cevap anahtarı hazırlanacaktır. Ard arda gelen iki sorunun doğru cevabı aynı şıkta olmayacak şekilde kaç farklı cevap anahtarı hazırlanabilir?*

A) 20! B) $5·4^{19}$ C) 4! D) 5^{20} E) 20^5

Çözüm: İlk sorunun cevabı için herhangi bir kısıtlama yok ama diğer sorularda bir önceki şıkkın kullanılması yasak olduğundan $5·4·4· … ·4 = 5·4^{19}$ durum mümkündür.

Doğru cevap: B.

Örnek. 9 *farklı basketbol maçının hepsinde yenen takımı garanti bilmek için en az kaç tahminde bulunmak gerekir? (Basketbol maçları berabere bitmez)*

A) 9 B) 18 C) 27 D) 81 E) 512

Çözüm: Her maç için 2 ayrı tahminde bulunmak gerekir. Toplam 9 maç olduğundan

$$2·2·2·2·2·2·2·2·2 = 2^9 = 512$$

tahminde bulunmak gerekir. Eğer maçlar futbol maçı olsaydı (berabere kalabilmek de olsaydı) cevap 3^9 olurdu.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir kilidin şifresi, birinci ve ikinci bileşenleri alfabemizdeki harflerden, öteki bileşenleri rakamlardan oluşan bir sıralı dörtlüdür. Bu kilit kaç değişik biçimde kilitlenebilir?*

A) $29^2·100$ B) $29·28·10^2$ C) $29·28·99$ D) $29^2·99$ E) $29·28·10·9$

Çözüm: Şifreye uygun sıralı dörtlüyü (X, Y, Z, T) biçiminde gösterelim. X ve Y yerine 29 harften birisi, Z, T yerine ise {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin elemanlarından biri yazılabilir. Saymanın temel ilkesine göre $29·29·10·10 = 84100$ tane sıralı dörtlü vardır. Öyleyse bu kilit 84100 değişik biçimde kilitlenebilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Her bir telefon için* 6 *basamaklı bir sayı kullanarak sıfır ile başlamayan kaç tane telefon numarası verilebilir?*

A) $9·10^4$ B) $9·10^5$ C) $9·10^6$ D) 99999 E) 999999

Çözüm: Telefon numarası (x, y, z, t, u, v) biçiminde olsun. Burada x yerine {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ve diğerleri yerine {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin her elemanı yazılabileceğinden $9·10·10·10·10·10 = 900000$ tane farklı ve "0" ile başlamayan telefon numarası verilebilir. Şöyle de düşünebilirsiniz: Her telefon numarasını bir sayı gibi düşünün. 0 ile başlaması yasak olduğundan 6 basamaklı kaç sayı olduğu soruluyor. En büyük 6 basamaklı sayıdan en büyük 5 basamaklı sayıyı çıkarmalıyız.

$$999999 – 99999 = 900000 = 9·10^5.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin elemanlarıyla*

aabeaabe, abccabcc, bcdebcde

gibi ilk dört harfiyle son 4 *harfi aynı olan* 8 *basamaklı kaç değişik kelime yazılabilir?*

A) 4! B) 4^4 C) 4^5 D) $4^4·4!$ E) 5^4

Çözüm: Son 4 harf ilk 4 harfle aynı olacağından, ilk 4 harfi kaç değişik şekilde yazabileceğimizi bulmalıyız. Harflerin farklı olması gerekmediğinden

$$\boxed{5}\boxed{5}\boxed{5}\boxed{5} = 5^4$$

değişik şekilde yazmak mümkündür.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$A = \{1, 2, 3, … , 25\}$ olmak üzere*

$$T = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in A,\ a < b \text{ ve } a < c\}$$

olsun. Buna göre bu şartları sağlayan T üçlülerinin sayısı olan $|T|$ değeri kaçtır?

A) 4900 B) 2450 C) 1200 D) 360 E) 120

Çözüm: Önce soruyu bir Türkçe'ye çevirelim. Diyor ki; a, b, c değerleri 26'dan küçük sayma sayıları olmak üzere, a değeri b'den ve c'den küçük olacak şekilde kaç farklı (a, b, c) sıralı üçlüsü yazabilirsiniz? Sözgelimi a = 1 olsun. b de c de 24 farklı değer alabilir, demek ki a = 1 iken 24^2 tane sıralı üçlü yazmak mümkündür.

Şimdi a = 2 olsun. b de c de 23 farklı değer alabilir. O halde a = 2 iken 23^2 tane sıralı üçlü yazılabilir.

Bu böyle devam edecektir. O halde

$$|T| = 24^2 + 23^2 + … + 2^2 + 1^2$$

olur ve

$$1^2 + 2^2 + … + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

formülünden $|T| = \dfrac{24 \cdot 25 \cdot 49}{6} = 4900$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Şimdi biraz önce yaptıklarımızdan çok farklı bir sayma metodu öğreneceğiz. Mümkün olduğunca anlamaya gayret edin. ☺

Bir adamın 4 farklı gömleği ve 5 farklı pantolonu olsun. Bu adamın kaç farklı şekilde giyinebileceğini bulacağız. Ne var ki bunda, 4·5 = 20 farklı seçenek vardır. Evet, doğru.

Şimdi soruyu hafifçe değiştirelim. Bu adama gömlek giymeme hakkı da verelim. O zaman cevap kaç olur? Eski hakları devam ettiğinden elde var 20. Bir de bu 5 pantolonu gömleksiz de giyebilir diye cevap 20 + 5 = 25 olmalıdır. İşte burada adamın sanki 4 değil de 5 gömleği varmış ama gömleklerinin biri görünmeyen gömlekmiş gibi düşünürsek 5·5 = 25'e daha rahat ulaşırız. Peki her ikisini de giymeme hakkı verirsek n'olur? O zaman pantolon giymeden 4 gömleği de giyebileceğinden, bir de ikisini de giymeme hakkı olduğundan 25 + 4 + 1 = 30 olmalıdır. Şimdi bakın 30'u nasıl bulacağız?

4 gömleği ve 5 pantolonu olan bu adamın aslında 5 gömleği ve 6 pantolonu varmış gibi düşünün, gömleğin biri ve pantolonun biri giyildi mi görünmüyor. O halde 5·6 = 30 olmalıdır.

Bu sayma metodu, aslında bize daha önce ezberletilen bir sürü formülün çıkışında da yatar. Örneğin, bir sayının kaç tane pozitif böleni olduğunu bulurken üslere 1 eklememizin sebebi de budur.

Örnek. *a, b, c farklı asal sayılar ve m, n, p birer sayma sayısı olduğuna göre $a^m b^n c^p$ sayısının kaç tane pozitif böleni vardır?*

A) $m + n + p$ B) $m + n + p + 3$ C) $m·n·p$
D) $(m + 1)·(n + 1)·(p + 1)$ E) $m^2·n^2·p^2$

Çözüm: Demek ki bu sayının m tane a çarpanı, n tane b çarpanı, p tane c çarpanı varmış. Bu çarpanların herhangi çarpımları bize bu sayının farklı pozitif bölenlerini verir. Canım ister, a'dan 1 tane b'den 2 tane alır çarparım, canım ister b'den 3 tane c'den 2 tane alır çarparım. Ama 2 tane b varsa 3 tane b alamam tabii ki. Demek ki kaç farklı a, b veya c seçebiliyorsam, o kadar farklı pozitif bölen mevcut. Yalnız unutmayın ki bundan hiç almıyorum demek de bir seçenektir. Yani a çarpanını $m + 1$ değişik şekilde, b çarpanını $n + 1$ şekilde, c çarpanını da $p + 1$ şekilde seçebiliriz. O halde saymanın temel ilkesine göre

$$(m + 1)·(n + 1)·(p + 1)$$

kadar farklı seçenek mevcut, bundan dolayı bu sayının pozitif bölenleri bu kadardır.

Doğru cevap: D.

Bazen bize bu sayının tek veya çift pozitif bölenlerinin kaç tane olduğunu sorar. Örneğimizde a'nın çift, b ve c'nin de tek sayı olduğunu varsayalım. a ile çarpılan her şey çift olmak zorundadır. Dolayısıyla içinde a olmayan çarpımlar bize kaç tane pozitif tek böleni olduğunu verir.

- ✓ O halde pozitif tek bölen sayısı $(n + 1)·(p + 1)$ tanedir.
- ✓ Pozitif bölen sayısından tek pozitif bölenlerin sayısını çıkartırsak çift pozitif bölen sayısı $m·(n + 1)·(p + 1)$ olarak bulunur.

Bir A sayısının çift bölen sayısı, aslında $A/2$ sayısının tüm bölenleri sayısıdır. Neden mi? $A/2$ sayısının tüm bölenlerini teker teker 2 ile çarparsak çift çıkacaktır da ondan!

Örnek. *Asal çarpanlarına ayrılmış şekli $T = 2^3·3^4·5^6$ olan bir sayının pozitif tam bölenlerinin,*

a) *Kaç tanesinin çift sayı olduğunu,*
b) *Kaç tanesinin tek sayı olduğunu,*
c) *Kaç tanesinin 5 ile bölünebildiğini bulalım.*

Çözüm:

$$A = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$$
$$B = \{3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4\}$$
$$C = \{5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6\}$$

a) Sayının çift olabilmesi için 2'nin katı olması gerekir. O halde, A kümesinden seçilen 2^1 elemanı ile birlikte, A kümesinin diğer 3 elemanından birinin, B kümesinin 5 elemanından seçilen bir eleman ve C kümesinin seçilen 7 elemanından bir elemanın çarpımı T'nin pozitif çift tamsayı bölenidir. Dolayısıyla: 3·5·7 = 105 tanedir.

b) B ve C kümelerinden seçilen birer elemanın çarpımı T'nin pozitif tek sayı bölenidir. Çarpım kuralına göre, 5·7 = 35 tanedir.

c) C kümesinin 5^1 elemanı seçildikten sonra a şıkkındaki çözüm dikkate alınırsa, 1·4·5·6 = 120 tanedir.

Bu metodu başka nerelerde kullanırız? İlkokuldan beri bildiğimiz *n elemanlı bir kümenin 2^n tane farklı alt kümesi olduğu* da buradan çıkar. Nasıl mı?

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

kümesini ele alalım. Bu kümenin elemanlarıyla alt küme yapmaya çalışalım. Başlayalım: Yazacağımız alt kümenin içinde a_1 olsun mu? Olabilir de olmayabilir de... a_2 olsun mu? Olabilir de olmayabilir de… a_3'ü alalım mı? Alabiliriz de almayabiliriz de… Anlayacağınız her eleman için 2 farklı seçeneğimiz olduğumuzdan

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ tane}} = 2^n$$

farklı altküme yazmak mümkündür.

Örnek. 4 *özdeş mavi*, 7 *özdeş sarı toptan en az* 1 *tanesi kaç değişik şekilde seçilebilir*?

A) 10 B) 20 C) 29 D) 30 E) 39

Çözüm: Toplar kendi aralarında özdeş olduklarından sadece hangi renk toptan kaç tane geldiği önemlidir. Maviler için 5 durum mümkün. Ya 1 tane, ya 2 tane, ya 3 tane, ya 4 tane gelir ya da hiç gelmez. Yani 5 durum mümkündür. Sarılar için de aynı sebepten dolayı 8 durum mümkündür. O halde çarpım yoluyla sayma kuralından 40 durum mümkündür. Bu 40 durumdan bir tanesi 0 mavi ve 0 sarı durumu olduğundan, onu atarız. O halde 39 değişik seçim mümkündür.

Doğru cevap: E.

Bu tip soruların genel formülünü çıkartalım:

Örnek. *Özdeş m tane mavi*, *y tane yeşil top arasından en az bir tanesi kaç değişik şekilde seçilebilir*?

A) $my + m + y$ B) $my + m$ C) $m \cdot y$ D) $my - m$ E) $m - y$

Çözüm: Özdeş olan toplardan hangisi önce aldığımızın önemi yoktur. Önemli olan sadece kaç tane alacağımızdır. Mavi toplardan m farklı seçim yapabiliriz, bir de mavi almama hakkımız var, o halde mavi için $m + 1$ seçim hakkımız var. Aynı nedenle yeşil toplar için de $y + 1$ seçim hakkımız var. O halde $(m + 1)(y + 1)$ durum mümkündür. Yalnız en az bir top almak zorunda olduğumuzdan ikisinden de almama hakkımız yok. Sonuçtan 1 çıkartmalıyız. O halde cevabımız

$$(m + 1)(y + 1) - 1 = my + m + y$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. 8 *kişi arasından önce bir başkan*, *sonra kalanlar arasından bir başkan yardımcısı*, *sonra da kalanlar arasından bir sekreter*, *sonra da kalanlar arasından bir çaycı seçilecektir*. *Bu seçim kaç türlü yapılabilir*?

A) 26 B) 60 C) 840 D) 1680 E) 8^4

Çözüm: Tahmin etmişsinizdir, başkana bir, yardımcısına bir, sekretere bir ve çaycıya bir olmak üzere 4'lü kutu çizeceğiz.

$$\boxed{8}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{5}$$

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ olduğundan 1680 farklı seçim yapılabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. 8 *kişi arasından önce bir başkan*, *sonra kalanlar arasından üç başkan yardımcısı seçilecektir*. *Başkan yardımcıları arasında statü farkı olmadığına göre bu seçim kaç türlü yapılabilir*?

A) 280 B) 560 C) 840 D) 1680 E) 8^4

Çözüm: Başkana bir ve yardımcılarına üç olmak üzere 4'lü kutu çizeceğiz. İçini de bir önceki problemdeki mantığı kullanarak dolduralım.

$$\boxed{8}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{5}$$

Yalnız burada farklı bir durum var. A, B, C insanları $3! = 6$ değişik şekilde yardımcı, sekreter ve çaycı seçilebiliyorlardı, fakat burada hepsi eşit statüde yardımcı olacaklarından son seçilen 3 kişiyi 6 değişik şekilde sıraya sokmanın gereği yoktur. Bu yüzden bulunan cevabı 3!'e yani 6'ya bölmek gerekir. O halde cevap $1680/6 = 280$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. 4 *elemanlı bir kümeden* 3 *elemanlı bir kümeye kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir*?

A) 7 B) 12 C) 64 D) 81 E) 2^{12}

Çözüm: Tanım kümesindeki 4 eleman için 4'lü bir kutu oluşturalım:

$$\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}$$

Her eleman değer kümesindeki canının istediği 3 elemanla da eşlenebilir. Bundan dolayı

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

farklı fonksiyon tanımlamak mümkündür.

Doğru cevap: D.

Örnek. 4 *elemanlı bir kümeden* 5 *elemanlı bir kümeye kaç farklı bire-bir fonksiyon tanımlanabilir*?

A) 9 B) 20 C) 24 D) 120 E) 5^4

Çözüm: Tanım kümesindeki 4 eleman için 4'lü bir kutu oluşturalım:

$$\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}$$

Bu sefer tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde canının istediğiyle eşleşemez. Bire-bir fonksiyonun tanımına göre iki eleman tek elemanla eşleşemez. O halde

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

tane bire-bir fonksiyon tanımlamak mümkündür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$s(A) = n$ olmak üzere bir A kümesi üzerinde tanımlanabilecek farklı,*

a) *Bağıntı sayısı,*
b) *Yansıyan bağıntı sayısı,*
c) *Simetrik bağıntı sayısı,*
d) *Ters-simetrik bağıntı sayısı kaçtır?*

Çözüm:

a) A kümesinde tanımlı bağıntı, $A\times A$ kümesinin alt kümesidir.

$$s(A\times A) = s(A)\cdot s(A) = n^2$$

olduğundan $2^{\left(n^2\right)}$ tane farklı bağıntı tanımlanabilir.

b) Yansıyan bir bağıntı A kümesinin her x elemanı için $A\times A$ kümesinden bir (x, x) elemanı bulunduracaktır. Dolayısıyla n^2 elemandan n tanesi mutlaka olacaktır, kalan $n^2 - n$ tane elemandan kaç tane küme yapabileceğimize bakalım. O halde

$$2^{\left(n^2-n\right)}$$

tane yansıyan bağıntı tanımlanabilir.

c) $s(A\times A) = n\cdot n = n^2$ olduğunu söylemiştik. Bu n^2 elemanın n tanesi (a, a) şeklindedir, yani bileşenleri birbirine eşittir, $n^2 - n$ tanesinin de bileşenleri farklıdır. Hatta, a ile b'yi farklı kabul edersek, $\frac{n^2-n}{2}$ tanesi (a, b) şeklinde, diğer $\frac{n^2-n}{2}$ tanesi de (b, a) şeklindedir. Simetrik bağıntının içinde herhangi bir (a, a) ikilisi sorun teşkil etmez ama (a, b) varsa (b, a) da olmak zorunda olduğundan, her bir (a, b) ile (b, a)'yı bir eleman gibi kabul etmeliyiz. Biri varsa diğeri de olmalı, biri yoksa diğeri de olmamalı diye yani.

O halde, $n+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ elemanlı bu kümenin her alt kümesi bir simetrik bağıntıdır. Böyle düşününce cevap

$$2^{\frac{n^2+n}{2}}$$

bulunur.

d) Tanım gereği (x, x) elemanlarının ters simetriyi bozmadığını daha önce söylemiştik. O halde $A\times A$ kümesinin (x, x) formundaki elemanları için 2 durum sözkonusudur, olmak ya da olmamak.

Şimdi, daha önce simetrik bağıntı sayısını bulurken yaptığımız gibi, geriye kalan $n^2 - n$ elemanla oluşturduğumuz $\frac{n^2-n}{2}$ tane ikili grubu göz önüne alalım. Bunların her biri için 4 durum söz konusudur. Bahsettiğimiz 4 durum şudur: Örnek olarak $\{(1, 2), (2, 1)\}$ grubunu ele alalım.

(1, 2) yok ve (2, 1) yok
(1, 2) yok ve (2, 1) var
(1, 2) var ve (2, 1) yok
(1, 2) var ve (2, 1) var

Ancak bu 4 durumdan, son durum olan 2 elemanın birden bulunması ters-simetriyi bozduğundan diğer 3 durum göz önüne alınacaktır. Bu halde tanımlanabilecek ters-simetrik bağıntı sayısı

$$2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3 = 2^n\cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$$

tane olarak bulunur.

Örnek. $A = \{1, 2, 3\}$ *kümesinde kaç farklı ters simetrik bağıntı tanımlanabilir?*

A) 24 B) 72 C) 108 D) 216 E) 432

Çözüm: Formülü çıkarmıştık ama yine de açıklamalı olarak çözelim.

$$A\times A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$$

olduğunu kaydedelim.

(1, 1) için 2 durum var
(2, 2) için 2 durum var
(3, 3) için 2 durum var
(1, 2) ve (2, 1) grubu için 3 durum var
(1, 3) ve (3, 1) grubu için 3 durum var
(2, 3) ve (3, 2) grubu için 3 durum var

O halde $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 2^3\cdot 3^3 = 6^3 = 216$ farklı ters simetrik bağıntı tanımlanabilir.

Doğru cevap: D.

Kişiye özel sayı oluşturmak. Tek basamaklı kaç tane sayı var? 10 değil mi? (Negatifleri saymıyoruz)

Peki, iki basamaklı kaç sayma sayısı var?
Bundan kolay ne var: 90.

Peki üç basamaklı?
900.

Dört?
9000.

Beş?
90000.

Ne kadar da kolay!
Sen öyle san!

Her zaman bu kadar basit değil. Bazen şöyle sorar: Şu şu şu rakamlarla oluşan şu kadar basamaklı kaç sayı var? Şu sayıdan büyük, şu sayıdan küçük, şu kadar basamaklı, tek veya çift kaç basamaklı kaç sayı var? Üstüne üstlük bir de şu sayıya bölünsün. Hıı, unutmadan bir de şu sayıyla başlamasın! Olur, başka emriniz?

İşte notlarımızın bu kısmında, şımarıkça sorulan bu sorulara cevap arayacağız. Örnek soru-çözümlerle anlatalım:

Örnek. *Sadece* 1, 2, 3, 4, 5 *rakamları kullanılarak*;

1) *Üç basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir?*

$\boxed{5}\boxed{5}\boxed{5}$

Birler, onlar ve yüzler basamağı için 5'er farklı seçeneğimiz var. O halde cevabımız 125 olmalı.

2) *Dört basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir?*

$\boxed{5}\boxed{5}\boxed{5}\boxed{5}$

Aynen yukardaki gibi ama bu sefer 4 basamak olduğundan $5^4 = 625$ değişik seçenekle karşı karşıyayız.

3) *Üç basamaklı kaç değişik çift sayı yazılabilir?*

$\boxed{5}\boxed{5}\boxed{2}$

Birler basamağı için {2, 4} olmak üzere 2 hakkımız var, diğer basamaklar için herhangi bir sınırlamamız yok. O halde cevabımız 5·5·2 = 50'dir.

4) *Üç basamaklı kaç değişik tek sayı yazılabilir?*

$\boxed{5}\boxed{5}\boxed{3}$

Bunu ister yukardaki gibi birler basamağının 3 ayrı hakkı var diye yapabiliriz, ki bunlar {1, 3, 5}'tir, istersek de yazılabilecek tüm üç basamaklı sayılardan çift olanları çıkararak yapabiliriz: 125 – 50 = 75 bulunur.

5) *Rakamları farklı kaç değişik üç basamaklı sayı yazılabilir?*

$\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}$

Yüzler basamağına 5 farklı rakam da gelebilir. Yalnız onlar basamağına böyle diyemeyiz. Çünkü oluşturacağımız sayının rakamlarının farklı olduğu söyleniyor. Hangi rakamı yüzler basamağına kullandıysak kullandık, fark etmez, onlar basamağına 4 hakkımız kalır. Aynen bunun gibi birler basamağına da 3 hakkımız kalır.

O halde 5·4·3 = 60 tane böyle sayı yazılabilirmiş. Aynı işlemleri birler basamağından başlayarak yüzler basamağına doğru giderek de yapabilirdik, sonuç değişmezdi. İsterseniz deneyin!

6) *Rakamları farklı kaç değişik üç basamaklı çift sayı yazılabilir?*

$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{2}$

Bu sefer birler basamağından başlayacağız. Sayının çift olması istendiğinden birler basamağına 2 hakkımız var, hangisi gelirse gelsin, ortadaki kutuya 4 hak kalır. Aynı şekilde başa da 3. Bunları çarparsak 3·4·2 = 24 çıkar. Bu sorunun çözümüne yüzler basamağından başlanabilir miydi? Deneyelim: İlk kutuya 5 hak var, ikinci kutuya 4. Eee, son kutuya kaç? 2 diyorsun ama ya bu sayıyı çift yapan değerler ilk kutularda kullanılmışlarsa? Belki de son kutuya hiç hak kalmadı! Belki de 1 tane kaldı, belki de 2'si de hala duruyor. Demek ki kutu yönteminde ilk önce mecbur olduğumuz sayıları yerleştirmemiz gerekir. Başlamaya mecbur olmadığımız kutular, ne kaldıysa onunla yetinmek zorundalar.

7) *Rakamları farklı kaç değişik üç basamaklı tek sayı yazılabilir?*

$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{3}$

Bu soruda da mecbur olduğumuz basamak son basamak. O halde son kutuya 3 yazalım. Rakamları farklı istendiğinden, birer birer azalarak diğer kutulara sayılarımızı yerleştirip çarpalım: 3·4·3 = 36 bulunur. Bu soruyu, istersek yazılabilecek tüm rakamları farklı değişik üç basamaklı sayılardan çift olanları çıkararak da bulabilirdik: 60 – 24 = 36.

8) *Rakamları farklı*, 300'*den büyük üç basamaklı kaç değişik çift sayı yazılabilir?*

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

Yukardaki kutular niye boş, merak ediyorsunuz değil mi? Anlatayım: Mecbur olduğumuz kaç kutu var? Bu sefer 2. Çünkü hem son basamağa çift sayılar gelecek, hem de ilk basamağa ''3'' veya daha büyük rakamlar. Eee, hangisinden önce başlamamız gerekir? İkisinden de başlayamazsın! Kutu yöntemini kullanabilmek için başlamaya mecbur olduğun kutu sayısı en çok 1 olmalı. O halde ne yapacağız? İki farklı kutu çizeceğiz. Bir mecburiyetimizi birinde, diğer mecburiyetimizi ise diğerinde gidereceğiz. Sorunu bir de başka türlü açıklayayım: Son basamağa {2, 4} olmak üzere iki hakkımız var ya, eğer son basamağa ''2'' gelirse bu ilk basamak için tehdit oluşturmaz ama ya ''4'' gelirse? ''4''ü son basamakta kullandığımız için artık ilk basamakta kullanamayız. İşte bundan dolayı bir sona ''2''nin geldiği kutu çizeceğiz, bir de ''4''ün geldiği.

Son basamağı ''2'' olan: $\boxed{3}\boxed{3}\boxed{1}$

Son basamakta ''2'' kullanıldığından ilk basamakta ''4''ü kullanabiliriz. İki rakam kullanıldığından onlar basamağına 3 hakkımız kalır. Bundan dolayı bu seçeneğin cevabı 9'dur.

Son basamağı ''4'' olan: $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}$

Burada da son basamakta ''4'' kullanıldığından ilk basamağa sadece {3, 5} sayıları kalır. Yine iki rakam kullanıldığından ortadaki kutuya 3 hak kalır. Bu seçeneğin de cevabı 6'dır. İki seçenek sonuçları toplanırsa 9 + 6 = 15 bulunur.

9) 1200'*den büyük dört basamaklı* 5 *ile bölünebilen* 4 *basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir?*

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

Rakamları farklı denmediğinden bu sefer tehlike yok gibine geliyor değil mi? Sadece mecbur olduğumuz tek şey var, o da son rakamın ''5'' olması zannediyorsun. Hayır, durum bu kadar basit değil. Çünkü ilk rakam ''1'' olsa, ikinci rakam ''1'' olamaz. Ama ilk rakam ''2, 3, 4, 5'' rakamlarından biri olsa ikinci rakam ''1'' olabilir. O halde yine 2 kutu çizmemiz gerekir.

İlk basamağı ''1'' olan: $\boxed{1}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{1}$

İlk basamağı ''1'' olmayanlar: $\boxed{4}\boxed{5}\boxed{5}\boxed{1}$

İlk seçenekte 20, ikinci seçenekte 100 sayı olduğundan cevabımız 120 olmalıdır.

10) *Rakamları çarpımı çift olan üç basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir?*

Bir sayının rakamları çarpımının çift olması için ne olması gerekir? En az bir rakamı çift olmalı. Bu ne demek? Sadece bir rakamı çift olsa da olur, iki rakamı çift olsa da olur, üç rakamının üçü çift olsa da olur. E, bunlar için üç hatta daha çok kutu gerekir. Biz bunun yerine tüm sayılardan rakamları çarpımı tek olanları çıkartacağız. Zira bu çok kolay. Çünkü bir sayının tüm rakamları tek sayı oldu mu, rakamlarının çarpımı zaten tek olur.

Üç basamaklı 125 değişik sayı yazılabileceğini bulmuştuk. Şimdi de tüm rakamları tek sayı olan kaç tane üç basamaklı değişik sayı yazabileceğimizi bulalım:

$\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}$

Her kutuya mecburen {1, 3, 5} rakamlarından biri gelmeli. Rakamları farklı istenmediğinden $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ tane böyle sayı yazılabileceğini anlarız. O halde sorunun cevabı $125 - 27 = 98$'tir.

Örnek. {0, 1, 2, 3, 4, 5} *kümesinin elemanları kullanılarak kaç değişik rakamları farklı üç basamaklı çift sayı yazılabilir?*

A) 52 B) 100 C) 104 D) 126 E) 156

Çözüm: Bu sorunun, üstte on şıkta çözdüğümüz sorudan farkı var. Çünkü bu sefer ''0'' sayısı da kullanılacak. Diğer rakamların hepsi ilk basamakta kullanılabilecekken, sıfırın böyle bir hakkı yok. ''Kullanmayız biter hocam, ne var ki?'' diyorsundur, haklısın ama bu soruda bir de sayının çift olması isteniyor. Yani ''0'' son basamakta kullanılırsa, ilk rakam için artık tehdit oluşturmaz ama ya son rakam da ''0'' değil de ''2'' veya ''4'' kullanılmışsa? İşte bu yüzden iki farklı kutu çizmek zorunda kalacağız. Ama son rakamın çift olma zorunluluğu olmasa tek kutu işimizi görürdü, bunu da bilin…

Son basamağı ''0'' olan:

$\boxed{5}\boxed{4}\boxed{1}$

Son basamağı ''2'' veya ''4'' olanlar:

$\boxed{4}\boxed{4}\boxed{2}$

İlk durumda 20, ikinci durumda ise 32 değişik sayı elde ettik, bunları toplarsak $20 + 32 = 52$ değişik sayı yazılacağını anlarız.

Doğru cevap: A.

Örnek. A = {1, 2, 4, 5, 7, 9} *kümesinin elemanları ile üç basamaklı* 600'*den küçük kaç sayı yazılabilir?*

A) 72 B) 144 C) 196 D) 216 E) 288

Çözüm: $\boxed{X}\boxed{Y}\boxed{Z}$ şekli üç basamaklı bir sayı göstersin. Yüzler basamağına 1, 2, 4, 5 yazılabileceğinden X, 4 seçeneklidir. Y ve Z ise altışar seçenekli olacağından 600'den küçük $4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$ tane sayı vardır.

Doğru cevap: B.

Örnek. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} *kümesinin elemanlarıyla rakamları birbirinden farklı* 5 *ile bölünebilen* 3 *basamaklı kaç sayı yazılabilir?*

A) 126 B) 136 C) 146 D) 156 E) 166

Çözüm: 5 ile bölünebilen sayıların son rakamı 5 veya 0'dır. Son rakamı 5 ise birler basamağı için 1, yüzler basamağı için 0 yazılamayacağından dolayı 8, onlar basamağı için de 8 seçenek vardır. Buna göre son rakamı 5 olan ve 5 ile bölünebilen 3 basamaklı $8 \cdot 8 \cdot 1 = 64$ tane sayı vardır.
Son rakamı 0 ise birler basamağı için 1, yüzler basamağı için 9 ve onlar basamağı için 8 seçenek vardır. Buna göre son rakamı sıfır olan $9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$ sayı yazılabilir. Verilen koşullara göre 5 ile bölünebilen $64 + 72 = 136$ sayı yazılabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} *kümesinin elemanlarıyla en az iki basamağı aynı olan kaç farklı* 3 *basamaklı sayı yazılabilir?*

A) 729 B) 504 C) 225 D) 81 E) 72

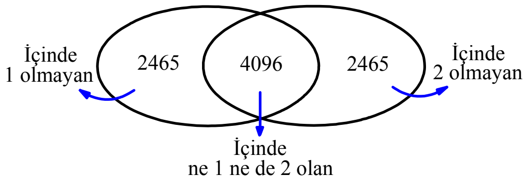
Çözüm: Yazılabilecek tüm 3 basamaklı sayılardan, yazılabilecek rakamları farklı 3 basamaklı sayıları atacağız. Tüm 3 basamaklı sayılar $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ tane olup, rakamları farklı olanlarsa $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ tanedir. O halde cevabımız $729 - 504 = 225$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. 1’*den* 10000’*e kadar olan doğal sayılar içinde hem* 1 *hem de* 2’*nin kullanıldığı kaç sayı vardır*?

A) 4096 B) 2465 C) 1000 D) 974 E) 926

Çözüm: 10000 sayısı zaten koşulu sağlamıyor diye onu atalım. 1’den 9999’a kadar olan sayıları da *abcd* ile gösterelim. İçinde 1 olmayan sayılar 9·9·9·9 = 6561 tanedir. İçinde 2 olmayan sayılar da 6561 tanedir. Bir de içinde ne 1 ne de 2 olan sayıların adedini bulalım. O da 8·8·8·8 = 4096 tanedir.



O halde içinde 1 olmayanların kümesiyle, içinde 2 olmayanların kümesini kesişimi içinde ne 1 ne de 2 olan sayıların adedini verir. Şemadan da göreceğiniz üzere 2465 tane içinde 1 olan ama 2 olmayan, yine 2465 tane içinde 2 olan ama 1 olmayan, 4096 tane de içinde ne 1 ne de 2 olan sayı vardır. Toplamları 9026 yapar. Bunu 10000’e kadar olan tüm sayıların adedinden çıkartırsak, cevabı 974 olarak buluruz.

Doğru cevap: D.

Örnek. 1, 2, 3, 4, 5 *rakamlarıyla yazılabilecek rakamları farklı tüm 5 basamaklı sayılar küçükten büyüğe doğru sıraya dizilse baştan* 50’*nci sayı kaç olur*?

A) 31254 B) 32154 C) 42153 D) 51234 E) 52143

Çözüm: Toplam 5! = 120 değişik sayı yazılabilir. Bunlardan 24 tanesi 1’le, 24 tanesi 2’yle, 24 tanesi 3’le, 24 tanesi 4’le, 24 tanesi de 5’le başlayacaktır. O zaman bizim sayı 3’le başlayan en küçük ikinci sayı olmalıdır. En küçüğü 31245 olduğundan, bu sayıdan sonra gelen 31254 sayısıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. 1, 2, 3, 4, 5 *rakamlarıyla yazılabilecek tüm 5 basamaklı sayılar küçükten büyüğe doğru sıraya dizilse baştan* 50’*nci sayı kaç olur*?

A) 11255 B) 21534 C) 32255 D) 32451 E) 54412

Çözüm: Bu sorunun bir öncekinden farkı rakamların tekrar edebilir olmasıdır. Toplam 5·5·5·5·5 = 3125 sayı yazmak mümkündür. Bunlardan 5·5·5·5 = 625 tanesi 1 ile başlar. Bizimki de bunların içindedir. Bu 625 sayının 5·5·5 = 125 tanesinin ikinci rakamı da 1’dir. Bizimki bunun da içindedir. Bu 125 sayının 5·5 = 25 tanesinin üçüncü rakamı da 1’dir. 25 tanesinin üçüncü rakamı 2’dir. O halde bizim sayı ilk iki rakamı 1, üçüncü rakamı 2 olan sayıların en büyüğüdür. Yani 11255.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Rakamları çarpımı 7’ye bölünebilen kaç tane dört basamaklı sayı vardır*?

A) 9000 B) 5832 C) 4904 D) 3168 E) 1736

Çözüm: 7 bir asal sayı olduğundan 4 rakamın çarpımının 7’ye bölünebilmesi için içlerinden en az 1 tanesi 7 olmalıdır. O halde içinde hiç 7 olmayan 4 basamaklı sayıların adedini, tüm 4 basamaklı sayıların adedinden çıkartalım. Yazılışında 7 kullanılmayan 4 basamaklı sayıların adedi 8·9·9·9 = 5832’dir. Diğer yandan 4 basamaklı sayıların toplam adedi de 9·10·10·10 = 9000 olduğundan cevabımız 9000 – 5832 = 3168 olmalıdır. Diğer yandan içinde 7 rakamı olmayıp da 0 rakamı olan 4 basamaklı sayıların rakamları çarpımı da 7’ye bölünebilir. Bu sayıların adedi de 1736 olduğundan cevap 3168 + 1736 = 4904 olur.

Doğru cevap: C.

Oturma, dizilme, sıralanma sayıları. Şimdi de bir miktar kimsenin/nesnenin boş buldukları bir yere/sıraya/rafa kaç değişik biçimde oturabileceğini/dizilebileceğini/sıralanacağını bulmaya çalışacağız. İşimiz yok ya!

Yine örneklerle açıklayalım ama ilerde permutasyon konusunda bu soruları farklı şekillerde çözebileceğimizi de belirtelim. Bazen daha kısa ama bazen daha uzun.

Örnek. *Ahmet ve Mehmet’in aralarında bulunduğu 5 kişi bir sıraya;*

i. *Kaç değişik şekilde oturabilir*?

5 kişi olduğundan 5’li bir kutu çizelim.

$\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}$

Sıranın en başına 5 kişinin 5’i de oturabilir. Onun sağına aday 4 kişi kaldı. Böylece ortaya 3, ortanın sağına da 2 aday kaldı. En sağa da 1 kişi. O halde 5·4·3·2·1 = 5! = 120 değişik şekilde oturabilirler.

ii. *Ahmet ile Mehmet yan yana olmak üzere kaç değişik şekilde oturabilir*?

Madem Ahmet ile Mehmet ayrılmak istemiyorlar, biz de onları bir iple bağlayalım. Artık Ahmet nereye giderse, Mehmet de oraya gideceğinden sanki tek kişi gibi oldular. 5 kişi bir sıraya 5! değişik şekilde oturuyorsa 4 kişi de 4! = 24 değişik şekilde oturur. Ama bu 24 durumun hepsinde Ahmet ile Mehmet yer değiştirebilirler. Bundan dolayı cevap 2·4! =48 olmalıdır.

iii. *Ahmet ile Mehmet birbirlerine küsler ve bundan dolayı yan yana olmak istemiyorlarsa kaç değişik şekilde oturabilirler*?

Toplam durumdan yan yana olma durumlarını çıkartırsak, yan yana olmama durumlarını bulmuş oluruz. O halde cevap 120 – 48 = 72 olmalıdır.

iv. *Ahmet ile Mehmet arasında her defasında sadece 1 kişi olmak kaydıyla kaç değişik şekilde oturabilirler?*

Ahmet'i A ile, Mehmet'i M ile diğer üç insanı da X, Y, Z ile gösterelim. A ile M'nin arasında X de olabilir, Y de, Z de… Yani $AXMYZ$, $XAYMZ$ ve $XYAZM$ durumları mümkündür. Fakat A ile M yer değiştirebileceği gibi, X, Y, Z de kendi aralarında yer değiştirebilirler. Üç farklı insan kendi arasında 3! kadar yer değiştirebileceğinden, bir de A ile M'nin 2! kadar yer değiştirme durumu olduğundan cevabımız

$$3 \cdot 3! \cdot 2! = 36$$

olmalıdır.

Örnek. 7 *kişilik bir sıraya* 5 *kişi kaç farklı şekilde oturabilir?*

A) 35 B) 120 C) 210 D) 2520 E) 504

Çözüm: Yine 5 kişi olduğundan 5'li bir kutu çizeceğiz.

$$\boxed{7}\boxed{6}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}$$

İlk adamın oturmak için 7 seçeneği var. İkincisinin 6. Üçüncüsünün 5. Dördüncüsünün 4. Sonuncusunun ise 3. Bundan dolayı cevabımız

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. 20 *öğrencisi bulunan bir sınıfta her gün değişik sıralı bir dizilişte dershaneden çıkılması kararlaştırılıyor. Sınıfın, bütün değişik sıralamalarda dershaneden çıkabilmesi kaç günde mümkündür?*

A) 20 B) 20! C) 2^{20} D) 20^2 E) 20^{20}

Çözüm: 20 kişi 20! kadar değişik sıralanabilir. O halde cevap 20! olmalıdır. Ne kadar azmış değil mi? Yirmifaktöryelcik! Bir yılda 365 gün çalıştıklarını farz etsek bile bu yaklaşık olarak 6,7 katrilyon yıl sürer. Eğer her saniyede değişik bir sırada kapıdan çıktıklarını farzetsek, bu süre 70 milyon yıldan fazla tutar. ☺

Doğru cevap: B.

Örnek. 1, 2, 3, 4 *rakamlarıyla yazılabilen, rakamları tekrarsız dört rakamlı sayıların toplamı nedir?*

A) 10^6 B) 10^5 C) $15 \cdot 10^4$ D) $6 \cdot 10^5$ E) 66660

Çözüm: 4 rakamla 4! = 24 sayı yazabiliriz. Bunları toplarsak 1, 2, 3, 4 rakamları her basamakta 24/4 = 6 kez tekrar eder. Bu yüzden 6·(1 + 2 + 3 + 4) = 60'dır. Rakamların basamak değerlerini dikkate alırsak,

$$60 \cdot 1000 + 60 \cdot 100 + 60 \cdot 10 + 60 \cdot 1 = 66660$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *ANA*, *EMME*, *NEDEN kelimeleri gibi baştan ve sondan okunuşları aynı olan kelimelere palindrom denir.*

$$A, A, A, B, B, C, C, D, D$$

harfleriyle kaç değişik 9 *harfli palindrom yazılabilir?*

A) 4 B) 12 C) 24 D) 64 E) 256

Çözüm: A harfinden 3 tane olduğundan, bunlardan bir tanesi mutlaka kelimenin tam ortasına gelmelidir. Diğer harf çiftlerinin de biri bu A'nın solunda, diğeri de sağında yer almalıdır. Ayrıca sadece ilk dört harfin dizilişlerine baksak yeterli olacaktır, çünkü son dört rakam tamamıyla ilk dört harfin ayna görüntüsü olacaktır. A, B, C, D harfleri 4! = 24 farklı şekilde dizilebileceğinden, 24 farklı palindrom yazılabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Y*, *A*, *Ğ*, *C*, *I harfleriyle yazılabilecek, alfabetik sıraya göre* 120 *farklı kelimeden*, 100'*üncü kelime nedir?*

A) *YACĞI* B) *YACIĞ* C) *YAĞCI* D) *YAĞIC* E) *YAICĞ*

Çözüm: Bu beş harfle 120 kelime yazıldığını biliyoruz. Her bir harf 120/5 = 24 kez tekrar eder.

A ile başlayan 4! = 24 kelime
C ile başlayan 4! = 24 kelime
Ğ ile başlayan 4! = 24 kelime
I ile başlayan 4! = 24 kelime
Y ile başlayan 4! = 24 kelime

vardır. O halde 100'üncü kelime kesinlikle *Y* ile başlamalıdır.

97'inci kelime *YACĞI*
98'inci kelime *YACIĞ*
99'uncu kelime *YAĞCI*
100'üncü kelime *YAĞIC*

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. 4 *farklı matematik*, 3 *farklı geometri kitabı bir rafa;*

i. *Kaç farklı şekilde dizilebilir?*

Matematik kitapları birbirlerinden, geometri kitapları da birbirlerinden farklı olduğundan aslında 7 farklı kitap vardır. Bundan dolayı cevap 7! olur.

ii. *Geometri kitapları birbirinden ayrılmamak üzere kaç değişik şekilde dizilebilir?*

Madem geometri kitapları birbirinden ayrılmayacak, bunları bir iple birbirlerine bağlayalım. Hepsi birlikte hareket edeceğinden tek bir kitapmış gibi davranırlar. 4 matematik kitabıyla birlikte ortada 5 kitap varmış gibi olur. 5 kitap da bir rafa 5! kadar değişik şekilde dizilir. Ama geometri kitapları da bu 120 dizilişin her birinde kendi aralarında yer değiştirebilirler. Bundan dolayı cevap 5!·3! = 720 olmalıdır.

CEVAPLI TEST 1

1.
A köyünden *B* köyüne 5 yol, *B* köyünden *C* köyüne de 3 farklı yol vardır.
***A*'dan *B*'ye uğramak kaydıyla *C*'ye kaç farklı şekilde gidilebilir?**

A) 3 B) 5 C) 8 D) 15 E) 125

2.
A şehrinden, *B* şehrine 6 farklı yoldan, *B* şehrinden *C* şehrine, 5 farklı yoldan gidilebilmektedir.
Gidiş ve dönüşte *B* şehrine uğramak ve gidişte kullanılan yol dönüşte kullanılmamak şartıyla, *A* şehrinden *C* şehrine kaç değişik yolla gidip dönülebilir?

A) 30 B) 50 C) 300 D) 500 E) 600

3.
3 farklı cep telefonu ve 4 farklı hattı bulunan bir kimse kaç değişik şekilde görüşme yapabilir?

A) 3 B) 4 C) 7 D) 12 E) 81

4.
Bir öğrenci, okulda 8 dersini haftada ikişer kez dinliyor. Bu derslerden, kendini eksik hissettiği 5 tanesini ise hem dershanede hem de özel derste birer kez daha dinliyor.
Bu öğrenci haftada en az kaç kere ders dinliyordur?

A) 21 B) 24 C) 26 D) 31 E) 36

5.
Bir lokantada 2 çeşit çorba, 5 çeşit yemek, 3 çeşit tatlı vardır.
Her çeşitten birer tane yemek isteyen birinin kaç değişik seçeneği vardır?

A) 10 B) 11 C) 13 D) 17 E) 30

6.
2 farklı takım elbisesi, 3 farklı ayakkabısı, 4 farklı şapkası bulunan bir kişi, bu giysilerden birer tane giymek şartıyla kaç farklı şekilde giyinebilir?

A) 24 B) 14 C) 11 D) 10 E) 9

7.
10 kişilik bir gruptan önce bir başkan sonra bir yardımcı kaç değişik şekilde seçilebilir?

A) 10 B) 19 C) 45 D) 90 E) 10^9

8.
7 kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden kaç değişik şekilde sonuçlanabilir?

A) 7 B) 14 C) 49 D) 98 E) 128

9.
18 takımlı bir ligde bir hafta sonunda oynanan tüm maçların sonuçlarını (ev sahibi takım yener, misafir takım yener, berabere biter şeklinde) garanti bilmek için en az kaç tahminde bulunmak gerekir?

A) 18 B) 3^9 C) 9^3 D) 3^{18} E) 18^3

10.
10 takımlı bir futbol liginde sezon sonu ilk üç takım kaç değişik şekilde oluşabilir?

A) 27 B) 30 C) 120 D) 360 E) 720

CEVAPLI TEST 2

1.
10 takımlı bir futbol liginde belli üç takımın ilk üç sırayı paylaşacakları önceden bellidir.
Sezon sonu kaç değişik sıralama oluşabilir?

A) 3! B) 7! C) 3!·7! D) 10! E) 3^7

2.
81 ili olan ülkemizde kendi alfabemizle 01 *ĞÇ* 000 şeklinde herhangi başka bir şart olmaksızın kaç değişik araç plakası yazmak mümkündür?

A) $10^5 \cdot 29^2$ B) $81 \cdot 29^2 \cdot 10^3$ C) $81 \cdot 29^2 \cdot 999$ D) $82 \cdot 29^2 \cdot 10^3$ E) $81 \cdot 29^2 \cdot 900$

3.
Bir haritadaki 12 şehrin 4'ü kırmızıya, 3'ü sarıya, 5'i maviye kaç farklı şekilde boyanabilir?

A) $\dfrac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}$ B) $\dfrac{12!}{6!}$ C) $\dfrac{12!}{3!\cdot 4!}$ D) 12^{12} E) 12^{60}

4.
49 toptan rastgele 6'sını seçip rasgele bir sıraya diziyorlar.
Bu sırayı bilmek için en az kaç değişik tahminde bulunmak gerekir?

A) $\dfrac{49!}{43!}$ B) $\dfrac{49!}{6!}$ C) $\dfrac{49!}{43!\cdot 6!}$ D) 6^{49} E) 49^6

5.
İki zar atıldığında oluşabilecek tüm durumlarda üst yüze gelen sayıların çarpımı kaç durumda tek sayı olur?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 27

6.
Birler basamağı tek sayı, onlar ve yüzler basamağı çift sayı olan kaç tane değişik üç basamaklı sayı yazılabilir?

A) 100 B) 125 C) 150 D) 250 E) 450

7.
Bir futbol takımı 6 kişi arkada 5 kişi önde olmak üzere kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebilir?

A) 11! B) $\dfrac{11!}{6!}$ C) $\dfrac{11!}{5!}$ D) $\dfrac{11!}{6!\cdot 5!}$ E) $5!\cdot 6!$

8.
Bir futbol takımı en uzun 6 kişi arkada, en kısa 5 kişi önde olmak üzere kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebilir?

A) 11! B) $\dfrac{11!}{6!}$ C) $\dfrac{11!}{5!}$ D) $2\cdot 5!\cdot 6!$ E) $5!\cdot 6!$

9.
Bir kimse, bilgisayarındaki dosyalara 1 Türkçe harf ve 2 rakamdan oluşan isimler vermektedir.
Bu sistemle en çok kaç dosyayı isimlendirebilir?

A) 2349 B) 2900 C) 7047 D) 8700 E) 17400

10.
3 elemanlı bir kümeden 4 elemanlı bir kümeye kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?

A) 12 B) 64 C) 81 D) 128 E) 2^{12}

CEVAPLI TEST 3

1.
4 elemanlı bir kümeden 4 elemanlı bir kümeye kaç farklı bire-bir fonksiyon tanımlanabilir?

A) 3 B) 6 C) 12 D) 24 E) 36

2.
6 farklı oyuncak, 3 çocuğa kaç değişik şekilde verilebilir?

A) 6 B) 18 C) 20 D) 3^6 E) 6^3

3.
3 mektup, 5 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?

A) 3 B) 10 C) 15 D) 3^5 E) 5^3

4.
5 insan, 2 farklı asansöre kaç değişik şekilde binebilir?

A) 7 B) 10 C) 25 D) 32 E) 120

5.
5 insan, 5 kişilik bir arabaya 2 öne, 3 arkaya olmak üzere kaç değişik şekilde binebilir?

A) 6 B) 12 C) 25 D) 32 E) 120

6.
İkisi ehliyetli 5 kişi, 5 kişilik bir arabaya, ehliyetliler öne, ehliyetsizler arkaya olmak üzere kaç değişik şekilde binebilir?

A) 6 B) 12 C) 25 D) 32 E) 120

7.
4 kişi 8 kişilik bir sıraya kaç değişik şekilde oturabilirler?

A) 32 B) 680 C) 1600 D) 1680 E) 1686

8.
Belli üç kişi bir arada olmak kaydıyla 7 kişi bir sıraya kaç değişik şekilde oturabilir?

A) 720 B) 630 C) 120 D) 30 E) 20

9.
Belli üç kişinin üçü birden yanyana olmamak üzere 7 kişi bir sıraya kaç farklı şekilde oturabilirler?

A) 4380 B) 4320 C) 4300 D) 720 E) 120

10.
5 farklı matematik, 4 farklı fizik kitabı bir rafa aynı dersin kitapları yan yana olmak üzere kaç değişik şekilde dizilebilir?

A) $9!$ B) $9!\cdot 2!$ C) $2!\cdot 4!\cdot 5!$ D) $4!\cdot 5!$ E) $20!$

CEVAPLI TEST 4

1.
3 farklı matematik, 4 farklı fizik, 5 farklı kimya kitabı bir rafa dizilecektir.
Matematik kitapları birbirinden ayrılmamak üzere kaç değişik şekilde diziliş sağlanabilir?

A) 10! B) 12! C) 12!·3! D) 10!·3! E) 10!·4!

2.
3 farklı matematik, 4 farklı fizik, 6 farklı kimya kitabı bir rafa dizilecektir.
Bir fizik kitabı ile başlayıp bir başka fizik kitabı ile biten bir sıralama kaç değişik şekilde yapılabilir?

A) 13! B) 12! C) 11! D) 6·11! E) 10!

3.
Herkesin birbirine hediye aldığı bir toplulukta toplam 110 hediye verilmişse, bu toplulukta kaç kişi vardır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 15

4.
$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı rakamları farklı kaç değişik sayı yazılabilir?

A) 200 B) 210 C) 300 D) 310 E) 343

5.
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı rakamları farklı kaç çift sayı yazılabilir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 24 E) 26

6.
$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı rakamları farklı 400'den küçük kaç çift sayı yazılabilir?

A) 24 B) 30 C) 36 D) 38 E) 40

7.
$C = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, 9\}$
kümesinin elemanlarıyla 3000 ile 8000 arasında kaç farklı sayı yazılabilir?

A) 343 B) 643 C) 685 D) 686 E) 786

8.
$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\}$
kümesinin elemanlarıyla yazılabilecek üç basamaklı rakamları farklı sayıların kaç tanesi 15 ile kalansız bölünür?

A) 38 B) 30 C) 20 D) 19 E) 10

9.
$E = \{1, 2, 3, \dots\}$
kümesinin elemanlarıyla yazılabilecek rakamları farklı üç basamaklı sayıların adedi 120 olduğuna göre $s(E)$ kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

10.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
kümesinin elemanlarıyla oluşturulabilecek rakamları farklı üç basamaklı sayılardan kaç tanesi 25 ile bölünebilir?

A) 2 B) 5 C) 10 D) 25 E) 35

11.
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
kümesinin elemanlarıyla oluşturulabilecek rakamları farklı üç basamaklı sayılardan kaç tanesi 25 ile bölünebilir?

A) 8 B) 10 C) 15 D) 16 E) 20

12.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
kümesinin elemanlarıyla rakamları tekrarsız, 4 basamaklı 3000'den küçük kaç değişik sayı yazılabilir?

A) 96 B) 84 C) 72 D) 48 E) 24