Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Dairesel Permutasyon

Sonlu bir kümenin elemanlarının bir çember üzerinde (kapalı bir eğri üzerinde) birbirlerine göre farklı biçimde dizilişlerinin her birine **bu elemanların bir dairesel permutasyonu** veya **dönel sıralaması** denir.

Toplam diziliş sayısı ise $(n-1)!$ formülüyle hesaplanır.

$(n-1)!$ sayısı nerden çıktı? n tane nesnenin, bir sıraya $n!$ kadar değişik şekilde dizilebileceğini kanıtlamıştık. Bunu unutmayın. Şimdi bu n tane nesneyi sıraya değil de yuvarlak bir masa etrafına oturtalım. Canımız nasıl isterse öyle oturtalım. Sonra herkes aynı yöne doğru birer sandalye kaysın. Sizce birbirlerine göre başka bir sıralama mı elde ettik, yoksa deminkinin aynısını mı? Aynısını değil mi? Peki bu kaymalar ne kadar sürerse sürsün fark etmez, onu da biliyorsunuz değil mi? Yani n tane dizilişin hepsi aslında birbirlerine göre aynı diziliştir. Onun için ilk bulduğumuz $n!$ sayısını n'ye bölmeliyiz, buradan da $(n-1)!$ sayısına ulaşırız.

Örnek. *5 kişilik bir aile yuvarlak masa etrafına kaç değişik şekilde oturabilirler?*

A) 6 B) 12 C) 24 D) 119 E) 120

Çözüm: Eğer yuvarlak masaya değil de sıraya otursalardı $5! = 120$ değişik sıralama olurdu. Yuvarlak masadaki her oturuş, 5 farklı oturuşu simgelediğinden bulunan 120 değeri, olması gereken oturuş sayısının 5 katıdır. Zaten formül de kanıtladığımız üzere yuvarlak masadaki oturuş sayısının

$$(5-1)! = 4! = 24$$

olduğunu söylüyor.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yuvarlak olan yemek masalarında her gün farklı bir oturuşla yemek yemeye karar veren bir aile 121'nci gün başka seçeneklerinin kalmadığını anlıyor. Yani ne yapsalar daha önceki bir oturma durumu elde ediyorlar. Buna göre bu ailede kaç birey vardır?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Demek toplam 120 değişik şekilde oturmak mümkün olmuş. $120 = 5!$ olduğundan ve masa da yuvarlak olduğundan ailede 6 birey vardır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *6 kişilik bir aile bir yuvarlak masada yemek yiyecektir.*

i. *Anne ile babanın yan yana oturması şartıyla*
ii. *Anne ile babanın yan yana olmaması şartıyla*
iii. *Anne ile babanın arasında en küçük çocuk olması şartıyla*
iv. *Anne ile babanın arasında herhangi bir çocuk olmak şartıyla*
v. *Çocukların bir arada olması şartıyla*

kaç farklı şekilde yemek yiyebilirler?

Çözüm: Her şıkkı ayrı ayrı çözeceğiz.

i. Madem anne ile baba ayrılmayacak, onları bir iple bağlayalım. Şimdi 5 kişi oldular. 5 kişi yuvarlak masa etrafına $4! = 24$ kadar değişik şekilde otururlar. Bir de anne ile babanın kendi aralarında yer değiştirme durumlarını düşünürsek $24 \cdot 2 = 48$ farklı şekilde olabileceğini buluruz.

ii. Anne ile babanın yan yana olmama durumunu hesaplamak biraz meşakkatli iştir. Bu yüzden biz tersten gideceğiz yani tüm durumdan anne ile babanın yan yana olma durumunu çıkartacağız. 6 kişi yuvarlak masaya $5! = 120$ değişik şekilde otururlar. 48 seferinde anne ile babanın yan yana olduğunu bulmuştuk. O halde $120 - 48 = 72$ durumda yan yana değillerdir.

iii. Bu sefer anne, en küçük çocuk ve babayı bir iple bağlayalım. İple bağlananları bir kişi sayarsak oldular 4 kişi. Yuvarlak masa etrafına 4 kişi $3! = 6$ değişik şekilde otururlar. Anne ile baba yine kendi aralarında yer değiştirebilirler, ortadaki çocuk, hala ortada olduğundan sorun yok. O halde cevabımız $6 \cdot 2 = 12$'dir.

iv. (iii) nolu şıkta en küçük çocuğun bulunduğu yere diğer üç kardeş de gelebilir. Yani dört kardeş için de 12 değişik şekilde anne ile babanın arasında olma durumu vardır. O halde cevap $12 \cdot 4 = 48$'dir.

v. Çocukların bir arada olması anne ile babanın bir arada olması demektir. Onu da (i) nolu şıkta çözmüştük zaten. Cevap 48 çıkmıştı. Ama sanki o soru çözülmemiş gibi tekrar çözelim. Dört çocuğu bir iple bağlayalım. Aile 3 kişi oldu. Yuvarlak masaya $2! = 2$ farklı şekilde otururlar. 4 çocuk da kendi arasında $4! = 24$ kadar değişik sırada bulunabilirler. O halde toplam oturma sayısı $2 \cdot 24 = 48$'dir.

Örnek. 4 *erkek ve* 4 *kadın yuvarlak bir masada aynı cins iki kişi yan yana olmayacak biçimde kaç farklı şekilde oturabilirler*?

A) 16 B) 36 C) 144 D) 288 E) 576

Çözüm: Önce centilmen olup şu kadınları bir bekleyelim bakalım, önce onlar otursunlar. ''Şu kadınlar'' deyip nasıl centilmen olunuyorsa? ☺ 4 kadın yuvarlak masaya 3! = 6 değişik şekilde oturur. 4 kadın oturunca, 4 kişilik boş yer kaldı aralarda. İşte bu boş 4 yere 4 erkek oturacak. Ama artık masanın yuvarlaklığının bir ehemmiyeti kalmadı. Onun için erkekler 4! = 24 değişik şekilde otururlar. O halde cevap 6·24 = 144 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Herhangi* 2 *öğretmen arasına* 1 *öğrenci olmak şartıyla* 5 *öğretmen ile* 5 *öğrenci yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler*?

A) $5!^2$ B) 5!·4! C) $4!^2$ D) 4!·6! E) 4!·3!

Çözüm: Önce öğretmenler yuvarlak masa etrafına (5 – 1)! = 4! = 24 farklı şekilde oturabilirler. Öğrenciler de öğretmenlerin arasında kalan 5 yere 5! değişik şekilde oturabilirler. Sonuç olarak 4!·5!'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *n tane evli çift yuvarlak bir masaya, her çift birlikte olmak şartıyla kaç farklı şekilde oturabilir*?

A) $2^n\cdot(n-2)!$ B) $(2!)^n\cdot n!$ C) $2^n\cdot n!$
D) $(2!)^n\cdot(n-1)!$ E) $(2!)^{n-1}\cdot(n-1)!$

Çözüm: *n* tane evli çift 2*n* tane kişi demektir. Hiç bir evli çift birbirinden ayrılmayacağından *n* kişi gibi düşünülür. *n* tane kişi, yuvarlak masaya (*n* – 1)! farklı şekilde oturur. Her çift kendi arasında 2! farklı şekilde yer değiştirebileceğinden cevap $(2!)^n\cdot(n-1)!$ olur.

Doğru cevap: D.

Anahtarlık Soruları. Anahtarlık sorularında diğerlerinden farklı bir durum vardır. Çünkü anahtarlar diğer nesnelerden biraz farklıdır da ondan. Aynı farka sahip her nesneye ait sorularda birazdan bahsedeceğimiz ayrıntıya dikkat ediniz. Anahtar problemlerinde anahtarların önü ile arkası aynı kabul edilir ve yapılan herhangi bir dizilişte aslında 2 farklı dizilişin birlikte yapıldığı düşünülür. Örneğin *A*, *B*, *C* isminde 3 farklı anahtarın olduğunu düşünün. Bunları bir anahtarlığa takın. Örneğin *ABC* sırasıyla taktınız. Şimdi anahtarlığı elinize alın ve şöyle bir havaya fırlatıp yere düşmesini sağlayın. Tekrar elinize aldığınızda anahtarları *CBA* diziliminde görmeniz mümkün müdür? Bence mümkün… İşte bu yüzden anahtarlık problemlerinde 1 diziliş aslında 2 diziliş demek olduğundan bulduğumuz cevabı 2'ye bölmeliyiz.

Örnek. 6 *farklı anahtar dairesel bir anahtarlığa kaç farklı şekilde takılabilir*?

A) 36 B) 60 C) 120 D) 360 E) 720

Çözüm: Dairesel anahtarlığı bir yuvarlak masa, anahtarları da bu yuvarlak masa etrafına oturan insanlar olarak farz edin. Bu problemin cevabı (6 – 1)! = 120 olurdu. O halde bizim anahtarlık probleminin cevabı da 120/2 = 60 olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Anahtarlık Maskotlu Olunca. Şimdi bu ''maskotlu'' lafı nerden çıktı diyorsunuzdur. ''Çiçekli-böcekli''si de mi var yoksa? Anahtarlık problemlerinde maskotun işlevi yuvarlak masayı sıraya çevirmektir. Çünkü daha önceden yan yana sayılan anahtarları maskot artık birbirlerinden ayırmıştır. Yuvarlak masa ile sıranın da zaten böyle bir ayrımı yok mudur? *ABC* insanları bir sıraya otursalar *A* ile *C*'ye yan yana diyemeyiz ama bir yuvarlak masada her halükarda *A* ile *C* yan yana gelirler. İşte bu yüzden maskotlu anahtarlıklar dairesel bile olsalar sıra gibi düşünülmelidirler. Peki, bir anahtarlığı maskotlu diye artık havaya atamaz mıyız? Kim tutar bizi? Yani, hala cevabı ikiye bölmeye devam!

Örnek. 6 *farklı anahtar dairesel ve maskotlu bir anahtarlığa kaç farklı şekilde takılabilir*?

A) 36 B) 60 C) 120 D) 360 E) 720

Çözüm: Anahtarlık dairesel bile olsa maskottan dolayı artık sıra gibi davranacaktır. Bu yüzden 5!/2 değil 6!/2 diyeceğiz. Bunun sayısı da 720/2 = 360 olmalıdır. Aslında maskotu da bir anahtar gibi düşünerek anahtarlığın daireselliğini koruyabiliriz. Maskotu anahtar kabul edince 7 anahtar oluyor. 7 anahtar da dairesel bir anahtarlığa 6!/2 = 360 değişik şekilde takılabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir kuyumcu, vitrinindeki boruya* 20 *değişik bilezik takmak istemektedir. Bunu kaç değişik şekilde yapabilir*?

A) 19! B) 19!/2 C) 20! D) 20!/2 E) 21!

Çözüm: Boruya *A*, *B*, *C* bileziklerini taktığınızı düşünün. Sonra borunun arka tarafına geçin. Aynı zamanda *C*, *B*, *A* sırasını da halletmiş olduğunuzu görürsünüz. Yani boruya takılan bilezik sorularında da cevabı 2'ye bölmek gerekiyor.
Bu yüzden cevabımız 20!/2 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
8 kişi yuvarlak bir masa etrafına kaç değişik sırada oturabilirler?

A) 8! B) 7! C) 7!·2 D) 6! E) 6!·2

2.
Belli üç kişi birbirlerinden ayrılmamak üzere 7 kişi yuvarlak masa etrafına kaç değişik şekilde oturabilirler?

A) 5!·3! B) 6!·3! C) 4!·3! D) 4!·2! E) 4!

3.
5 erkek ve 5 kadın, yuvarlak bir masa etrafına 2 erkek arasına 1 kadın gelecek biçimde kaç değişik şekilde oturabilirler?

A) 9! B) 5!·5! C) 5!·4! D) $\frac{9!}{5!}$ E) 5!

4.
5 farklı anahtar dairesel bir anahtarlığa kaç farklı şekilde takılabilir?

A) 5! B) $\frac{5!}{2}$ C) 4! D) $\frac{4!}{2}$ E) 4!·2!

5.
7 farklı anahtar dairesel ve maskotlu bir anahtarlığa kaç değişik şekilde takılabilir?

A) 7! B) $\frac{7!}{2}$ C) 6! D) $\frac{6!}{2}$ E) 6!·2!

6.
6 farklı anahtar belli ikisi yan yana olmak kaydıyla dairesel ve maskotlu bir anahtarlığa kaç değişik şekilde takılabilir?

A) 5! B) $\frac{5!}{2}$ C) 4! D) $\frac{4!}{2}$ E) 4!·2!

7.
6 kişilik bir aile yuvarlak bir masa etrafına anne ve baba yan yana, iki erkek kardeş yan yana, iki kız kardeş de yan yana olmak üzere kaç değişik şekilde oturabilir?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 24 E) 48

8.
6 kişilik bir aile yuvarlak bir masa etrafına anne ve baba yan yana olmak üzere kaç değişik şekilde oturabilir?

A) 24 B) 48 C) 120 D) 240 E)720

9.
Bir kuyumcu, vitrinindeki boruya 10 değişik bilezik takmak istemektedir.
Bunu kaç değişik şekilde yapabilir?

A) 9! B) 9!/2 C) 10! D) 10!/2 E) 11!

10.
Ayşe teyze, yıkadığı 9 çamaşırı iki ağaç arasına gerilmiş bir ipe kurumaları için asacaktır.
Bunu kaç değişik şekilde yapabilir?

A) 9! B) 9!/2 C) 10! D) 10!/2 E) 11!