Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Nesnelerin Dağılımları

Bu yazımızda, r tane nesneyi n farklı kutuya belli şartlar altında kaç değişik şekilde dağıtabileceğimizi ve bunla aynı manaya gelen problemlerin çözümünü öğreneceğiz. Yalnız burada nesnelerin birbirlerinden farklı olmaları ve özdeş olmaları iki farklı durum vardır. Her birini ayrı ayrı inceleyeceğiz.

Önce, bu konuda çok önem arz eden fonksiyon sayısını hatırlayalım.

Fonksiyon sayısı. $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise A'dan B'ye $2^{m \cdot n}$ tane bağıntı tanımlanabileceğini biliyoruz. Çünkü $A \times B$ kümesi $m \cdot n$ elemanlı olup, bu kümenin her altkümesi de A'dan B'ye bir bağıntı oluşturur. Niye mi? Tanımı öyle…

Bu $2^{m \cdot n}$ tane bağıntının n^m tanesi fonksiyondur. E doğal olarak, $2^{m \cdot n} - n^m$ tanesi fonksiyon değildir. Şimdi bunu açıklayalım.

f, A'dan B'ye tanımlanmış bir fonksiyon ve hava da çok soğuk olsun.☺ A'nın elemanlarını bir yere yerleştirilmeleri gereken m tane insan ve B'nin elemanlarını da n tane otel gibi düşünelim. Her insanın n tane otel seçeneği vardır. Dikkat edin, birisi bir otele gidince, diğer birisi o otele gidemez diye bir şartımız yok. İki insan bir otelde kalabilir ama bir insan 2 otelde kalamaz.

m kere n seçenek de çarpım yoluyla sayma metodunu kullanırsanız, toplam

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n \cdot n}_{m \text{ tane}} = n^m$$

tane seçenek demektir. Demek ki A kümesinden B kümesine n^m tane değişik fonksiyon tanımlamak mümkünmüş.

Örnek. $A = \{x : -3 < x < 7, x \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : |x| < 2, x \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre A'dan B'ye kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?

A) 5^9 B) 9^5 C) 3^9 D) 9^3 E) 3^5

Çözüm: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $B = \{-1, 0, 1\}$ olduğundan $s(A) = 9$ ve $s(B) = 3$'tür. Dolayısıyla cevabımız 3^9 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olduğuna göre B'den A'ya tanımlanabilecek bağıntılardan kaç tanesi fonksiyondur?*

A) 15 B) 125 C) 243 D) 250 E) 2^{15}

Çözüm: A'dan B'ye yazılabilecek fonksiyon sayısının $s(B)^{s(A)}$ olduğunu kanıtladığımızdan, B'den A'ya yazılabilecek fonksiyon sayısı da $s(A)^{s(B)}$ olmalıdır. O halde cevabımız 3^5 yani 243 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$s(A) = 4$ olduğu bilinen bir A kümesinden $s(B) = 3$ olduğu bilinen bir B kümesine tanımlanan tüm bağıntılardan kaç tanesi fonksiyon değildir?*

A) 64 B) 81 C) 4015 D) 4032 E) 4096

Çözüm: A'dan B'ye yazılabilecek bağıntı sayısı $2^{12} = 4096$ olup, bunlardan sadece $3^4 = 81$ tanesi fonksiyondur. Dolayısıyla fonksiyon olmayanların sayısı

$$4096 - 81 = 4015.$$

Doğru cevap: C.

r farklı nesneyi n farklı kutuya dağıtmak

r farklı nesneyi, n kutuya

$$n^r$$

farklı şekilde yerleştirebiliriz.

Çünkü her nesneyi yerleştirecek n değişik kutu mevcuttur. Bir nesneyi bir kutuya yerleştirdik diye, diğer bir nesneyi o kutuya yerleştiremeyiz gibi bir sınırlama sözkonusu değildir.

Anlayacağınız, problem temelde *r elemanlı bir kümeden n elemanlı bir kümeye kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir* problemiyle aynıdır.

Örnek. 3 *oyuncak, tüm oyuncakları dağıtma mecburiyetiyle, 5 çocuğa kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

A) 15 B) 30 C) 60 D) 125 E) 210

Çözüm: Bu soru, 3 *elemanlı bir kümeden* 5 *elemanlı bir kümeye kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir* problemiyle aynıdır. Bir eleman iki farklı elemanla eşleşemeyeceğinden ve değer kümesinde boşta eleman kalabileceğinden, bu iki sorunun şartları kesişmektedir. Birinci oyuncağı 5 farklı çocuğa verebiliriz, ikinci oyuncağı da, üçüncü oyuncağı da. Bu yüzden cevabımız $5\cdot5\cdot5 = 5^3 = 125$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Gönderilmesi gereken* 5 *mektup,* 4 *farklı posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?*

A) 5^4 B) 4^5 C) 4^4 D) 5^5 E) 3^4

Çözüm: 5 mektubun 4 farklı posta kutusuna atılma sorusuyla, 5 insanın 4 farklı otelde kalabilme sorusu aslında aynıdır. Her insanın bir otele yerleşmesi gerekirdi, burada da her mektup mutlaka gönderilmeli. Diğer yandan bir insan 1'den fazla otelde kalamazdı, bir mektup da 1'den fazla posta kutusuna atılamaz. 1'den fazla insan 1 otelde kalabilirdi, 1'den fazla mektup da 1'den fazla posta kutusuna atılabilir.

Şimdi, siz söyleyin bakalım, bir fark var mı? Bu yüzden, sorumuzu A'dan B'ye yazılabilecek fonksiyon sayısı gibi çözeceğiz.

Doğru cevap: B.

Örnek. 8 *mektup* 3 *posta kutusuna belli üç mektup aynı kutuya atılmak şartıyla kaç farklı şekilde atılabilir?*

A) 3^5 B) 3^6 C) 3^7 D) 3^8 E) 5^3

Çözüm: Aynı anda atılacak olan üç mektubu bir iple bağlayalım. Toplam 6 mektup varmış gibi olur. 6 mektup 3 posta kutusuna 3^6 değişik şekilde atılabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. 3 *farklı asansörün bulunduğu bir apartmana giren* 4 *kişi kaç değişik şekilde çıkmak istedikleri kata çıkabilirler?*

A) 3 B) 4 C) 12 D) 64 E) 81

Çözüm: Tabi, soruda söylenmemiş ama merdiven varsa kullanması yasak olmalı. Burada da asansörleri birer otel gibi düşünün. Ha bir insan otele gitmiş, ha asansöre binmiş. Bir kişi aynı anda iki farklı otele gidemeyeceğinden, 2 farklı asansöre de binemez. Boşta otel kalsa bir şey olmazdı, boşta asansör kalsa da bir şey olmaz. Dolayısıyla bu problem de fonksiyon sayısı problemidir.

$$s(B)^{s(A)} = 3^4 = 81.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *A kentinden B kentine otobüs, tren ve uçak ile gidilebildiğine göre, A'dan B'ye gitmek isteyen* 5 *kişi bunu kaç farklı şekilde gerçekleştirebilir?*

A) 8 B) 15 C) 125 D) 243 E) 250

Çözüm: Otobüs, tren ve uçağı üç ayrı otel gibi düşünebiliriz. 5 insanı bu otellere yerleştireceğiz. O halde bu da fonksiyon sayısı problemidir.

$$s(B)^{s(A)} = 3^5 = 243.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $A = \{a, b, c, d\}$ *kümesi veriliyor. A'dan A'ya tanımlanabilecek fonksiyonların kaç tanesi a elemanını d elemanına bağlar?*

A) 3 B) 4 C) 16 D) 64 E) 256

Çözüm: Elimizde 4 insan 4 de otel var gibi düşünün. a insanı kesinlikle d otelinde kalacak. O halde kalan 3 insanı 4 otele kaç farklı şekilde yerleştirebileceğimizi düşünelim. Bu sayı da $4^3 = 64$'tür.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A = \{a, b, c, d\}$ *kümesi veriliyor. A'dan A'ya tanımlanabilecek fonksiyonların kaç tanesi a elemanını d elemanına ve b elemanını c elemanına bağlar?*

A) 3 B) 4 C) 16 D) 64 E) 256

Çözüm: Yine 4 insan ve 4 otelimizin olduğunu düşüneceğiz. a insanının d otelinde, b insanının c otelinde kalacağı garantiymiş. O halde boşta insan kalmaması için c ve d insanlarını da bu 4 otele yerleştirmeliyiz. 2 insan 4 otele $4^2 = 16$ şekilde yerleşebilir.

Doğru cevap: C.

r farklı nesneyi, n kutuya, her kutuda herhangi bir sayıda ama dizilişi önemli olmak kaydıyla,

$$P\binom{n+r-1}{r}$$

kadar değişik şekilde yerleştirebiliriz.

Çünkü birinci nesneyi n kutudan birine yerleştirebiliriz. İkinci nesneyi, yerleştirilen birinci nesnenin sağına da soluna da koyabileceğimizi hesaba katarsak $n + 1$ kutuya yerleştirebiliriz. Aynı şekilde devam edersek, üçüncü nesneye $n + 2$ farklı yer var demek olur. Sonuç olarak nesnelerin dizilişi

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+r-1)$$

farklı şekilde olabilir. Bunun da

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} = P\binom{n+r-1}{r}$$

olduğunu bulmak hiç de zor değildir.

Örnek. *Bir komodinin yeterince büyük beş çekmecesi vardır.* 3 *farklı gömleği, bu* 5 *çekmeceye, içindeki sıra da önemli olmak kaydıyla kaç farklı şekilde koyabiliriz?*

A) 15 B) 30 C) 60 D) 125 E) 210

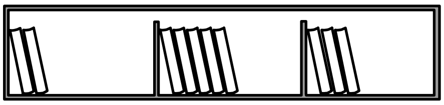
Çözüm: Birinci gömleği 5 farklı çekmeceye koyabiliriz. İkinci gömleğe kaç farklı seçenek olduğuna bakalım. Bu gömleği hala 5 çekmeceye de koyabiliriz ama ilk gömleği koyduğumuz çekmecede artık iki farklı durum vardır. İkinci gömleği, ilk gömleğin üstüne de koyabiliriz, altına da, yani aslında ikinci gömlek için 6 farklı seçenek vardır. Şimdi de üçüncü gömleğe geçelim. Bunun için de aynı sebepten dolayı 7 seçenek vardır. O halde cevabımız $5\cdot6\cdot7 = \frac{7!}{4!} = P\binom{7}{3}$.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yeterince büyük üç bölmesi bulunan bir kitaplık rafına* 10 *farklı kitap, bölmelerdeki sıra da önemli olmak kaydıyla kaç farklı şekilde dizilebilir?*

A) $P\binom{12}{3}$ B) $P\binom{13}{3}$ C) $P\binom{12}{9}$ D) $\binom{12}{10}$ E) $P\binom{13}{10}$

Çözüm: Hemen formülümüzü kullanalım.



10 nesne ve 3 kutu varmış gibi düşünmeliyiz. O halde

$$P\binom{10+3-1}{10} = P\binom{12}{10}$$

farklı şekilde diziliş mümkündür. Daha açık olarak, ilk kitap için 3 yer var, ikinci kitap için 4 yer var, …, onuncu kitap için 12 yer var. O halde $3\cdot4\cdot\ldots\cdot11\cdot12 = P(12, 10)$.

Doğru cevap: D.

Örnek. 5 *erkek ve* 4 *kadından oluşan bir grup, kadınlar boy sırasında olmak üzere kaç farklı şekilde sıraya dizilebilirler?*

A) $P\binom{9}{4}$ B) $P\binom{9}{5}$ C) $P\binom{9}{6}$ D) $2\cdot P\binom{9}{4}$ E) $2\cdot P\binom{9}{5}$

Çözüm: Önce kadınları ister kısadan uzuna isterse uzundan kısaya bir sıraya dizelim. Şimdi 5 erkeği başa sona veya aralara yerleştireceğiz. Yani ilk erkeğe 5 farklı yer var. İkinci erkeğe 6, üçüncüsüne 7, dördüncüsüne 8 ve beşincisine de 9 farklı yer bulunabilir. Bir de kadınları ters sırada dizdiğimizi düşünürsek, bulduğumuz sonucu 2'yle çarpmalıyız.

$$5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot2 = 2\cdot P\binom{9}{5}.$$

Doğru cevap: E.

r farklı nesneyi, *n* kutuya, her kutuda en fazla 1 nesne olmak kaydıyla

$$P\binom{n}{r}$$

kadar değişik şekilde yerleştirebiliriz.

Çünkü, birinci nesne *n* kutudan birine, ikinci nesne kalan (*n* – 1) kutudan birine, üçüncü nesne kalan (*n* – 2) kutudan birine, … , *r*'ninci nesne de kalan (*n* – *r* + 1) kutudan birine yerleştirilebilir. Bu durumda, farklı yerleştirme sayısı

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P\binom{n}{r}$$

olmalıdır.

Örnek. 3 *farklı oyuncak,* 5 *çocuğa, her çocuğa en çok* 1 *tane oyuncak gelme koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

A) 15 B) 30 C) 60 D) 125 E) 210

Çözüm: Bu soru, 3 *kişi* 5 *kişilik bir sıraya kaç farklı şekilde oturur* problemiyle aynıdır. Bir sıraya iki kişi oturamayacağından, her boş yere en çok 1 kişi oturabilir. Birinci oyuncağı 5 farklı çocuğa verebiliriz, ikinci oyuncağı ancak 4 farklı çocuğa verebiliriz, üçüncü oyuncak için de ancak 3 farklı çocuk bulunabilir. Bu yüzden cevabımız $5\cdot4\cdot3 = 60$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. 40 *kişilik bir grup, film izlemek için sinemaya giderler. Kendilerine,* 50 *kişilik boş yerin olduğu ve istedikleri gibi oturabilecekleri söylenir. Bu durumda kaç değişik şekilde oturmak mümkün olur?*

A) $P\binom{50}{10}$ B) $C\binom{50}{10}$ C) $P\binom{50}{40}$ D) $C\binom{50}{40}$ E) 40!

Çözüm: Birinci kişi boş olan 50 koltuktan herhangi birine oturur. Artık ikinci kişiye, birincinin üstüne oturamayacağına göre, 49 seçenek kalmıştır. Aynı sebepten üçüncü kişi 48 farklı seçeneğe sahiptir. Böyle böyle devam edilirse kırkıncı kişiye, diğer 39 kişi 39 koltuğu doldurduğundan 11 seçenek kalır. O halde cevap

$$50\cdot49\cdot48\cdot\ldots\cdot12\cdot11$$

olmalıdır. Şimdi bunun şıklardan hangisine eşit olduğunu bulalım. Hem payı hem de paydayı 10! ile çarparsak, sonuca ulaşırız:

$$50\cdot49\cdot48\cdot\ldots\cdot12\cdot11 = \frac{50!}{10!} = P\binom{50}{40}.$$

Doğru cevap: C.

***r* özdeş nesneyi *n* farklı kutuya dağıtmak.** Şimdi nesnelerin özdeş olduğu durumları inceleyeceğiz. Özdeş nesneler, dış görünüş olarak aynı olduklarından diziliş hesapları yapmayacağız, sadece adet hesapları yapacağız.

Fakat burada da çözümler $r \le n$ ve $r \ge n$ durumuna göre değişiklik göstermektedir. Her birini ayrı ayrı inceleyeceğiz. Önce $r \le n$ örneklerine bakalım.

$r \le n$ olmak üzere, r tane özdeş nesneyi n tane kutuya, kutuların herbirinde en çok 1 nesne olacak şekilde

$$C\binom{n}{r}$$

şekilde dağıtabiliriz.

Yani n kutudan r tanesini kaç farklı şekilde seçebileceğimizi bulsak yeter. Nesneler özdeş olduğundan elimizdeki r tane nesneyi r tane kutuya koymak, kombinasyon değil sadece kas hareketi gerektirir. ☺

Örnek. 3 *özdeş oyuncağı*, 5 *çocuğa*, *hiçbirine* 1'*den fazla oyuncak vermemek üzere kaç değişik şekilde dağıtabiliriz*?

A) 5 B) 8 C) 10 D) 15 E) 35

Çözüm: Sadece birer oyuncak alacak olan şanslı 3 çocuğu seçsek yeter. Oyuncaklar özdeş olduğundan, *ona niye onu verdin de bana bunu verdin* kavgası yaşanmayacak. Toplam 5 çocuk olduğundan, bu seçimi

$$C\binom{5}{3} = 10$$

kadar değişik şekilde yapabiliriz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *MUSTAFA kelimesinin harfleriyle iki A'nın yan yana olmadığı kaç farklı 7 harfli kelime yazılabilir*?

A) 120 B) 600 C) 900 D) 1800 E) 2160

Çözüm: İki farklı yoldan yapacağız.

Birinci yol. Bu yolda soruyu eski bilgilerimizi kullanarak çözelim. Hatırlayın, bu tarz sorularda tekrarlı permutasyon kullanıyorduk.
Önce kaç değişik 7 harfli kelime yazabileceğimizi bulalım. İki tane A harfi olduğu için $\frac{7!}{2!} = 2520$ farklı kelime yazılabileceğini biliyoruz. Şimdi bu iki A harfinin yan yana olduğu kaç farklı 7 harfli kelime yazabiliyorsak, toplam kelime sayısından çıkartacağız. Madem iki A harfi birbirinden ayrılmayacak, onları bir iple bağlayalım. Şimdi 6 harf varmış gibi oldu. Bu 6 harfle de 6! = 720 değişik kelime üretilebilir. O halde 2520 – 720 = 1800 değişik durum mümkündür.

İkinci yol. Şimdi de yeni öğrendiğimiz teknikleri kullanalım.
Önce A dışındaki harfleri bir masaya yatıralım. M, U, S, T, F harfleriyle 5! = 120 değişik sıra oluşturulabilir. Herhangi bir sırayı seçelim. Örneğin

_ *M* _ *U* _ *S* _ *T* _ *F* _

olsun. Bizden iki tane A harfinin yan yana olmaması istendiğinden bu harflerin aralarındaki çizgiyle gösterilmiş boşluklara bu A'ları teker teker dağıtmalıyız. A'lar aynı olduğundan, boşluk sayısı da 6 olduğundan, problem 2 *özdeş nesneyi 6 kutuya, her kutuya en fazla 1 nesne gelmek üzere kaç değişik şekilde yerleştirebiliriz* problemine dönmüştür. Bu da $C(6, 2) = 15$ değişik şekilde mümkündür. İlk durumla birlikte düşünülünce cevabımız $5!\cdot C(6, 2) = 120\cdot 15 = 1800$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Bazı problemlerde nesneler özdeş değil, farklı olsalar bile bu çözüm yolunu kullanabiliriz. Tabi ki soruda nesnelerin farklı dizilişleri istenmiyor olacak. Herhangi bir diziliş yetecek. Bu nasıl mı olur? 2-3 sene öncesinin bir ÖSS sorusu buna çok güzel bir örnek olacak. Versiyonlarını da ekledim.

Örnek. *$a > b > c$ olmak üzere kaç farklı abc üç basamaklı sayısı vardır*?

A) 36 B) 64 C) 84 D) 96 E) 120

Çözüm: $a > b > c$ dendiğine göre rakamlarının farklı olması isteniyor. Rakamlar her ne kadar birbirlerinden farklı olsalar da küçükten büyüğe diziliş sadece tek bir şekilde mümkün olduğundan sanki rakamlar özdeşmiş gibi düşünülebilir. O halde 10 rakamdan herhangi 3'ünü seçelim. O halde cevap

$$C(10, 3) = 120$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *$a < b < c$ olmak üzere kaç farklı üç basamaklı abc sayısı yazılabilir*?

A) 36 B) 64 C) 84 D) 96 E) 120

Çözüm: İki farklı yoldan yapacağız.
Birinci yol. Bir önceki soru gibi düşünerek cevabın C(10, 3) = 120 olduğunu düşünebilirdik ama burada başta sıfırın olmaması gerekiyor. O halde başta 0'ın bulunduğu ve rakamları artan sırada olan kaç 3 basamaklı sayı olduğunu bulup, 120'den çıkaralım. b ve c değerleri 9 rakam içinden seçilip, küçükten büyüğe doğru dizileceğinden, istenen koşuldaki sayı adedi C(9, 2) = 36'dır. Bu durumda cevabımız 120 – 36 = 84 olmalıdır.
İkinci yol. İlk rakam 0 olamıyorsa hiçbiri olamaz. O zaman 0 haricindeki 9 rakamdan herhangi 3'ünü seçelim. $a < b < c$ dendiğine göre, bu üç sayı sadece tek bir şekilde küçükten büyüğe dizilebilir. O halde cevap $C(9, 3) = 84$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Rakamları artan sırada ve hepsi* 2*'den büyük olan kaç farklı üç basamaklı sayı vardır*?

A) 35 B) 36 C) 42 D) 56 E) 120

Çözüm: Aynen bir önceki çözümde olduğu gibi,

$$2 < a < b < c$$

olmak üzere kaç farklı *abc* sayısı yazılabileceğini bulalım. 2'den büyük 7 tane rakam olduğundan $C(7, 3) = 35$ tane seçim mümkündür. Bu seçimlerin her biri sadece tek 1 şekilde artan sıraya konulabilir. O halde cevap 35 olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Rakamları artan sırada olan kaç farklı dört basamaklı sayı vardır*?

A) 36 B) 64 C) 84 D) 96 E) 126

Çözüm: $a < b < c < d$ olmak üzere kaç farklı *abcd* sayısının var olduğu sorulmaktadır. Önce on rakam arasından dört tanesini seçelim. $C(10, 4) = 210$ kadar değişik seçim mümkündür. Yalnız bunlar arasında 0 ile başlayanlar da var, onları atarsak cevabı bulmuş olacağız. O halde 0'ı alıp, en başa koyalım. Kalan 9 rakamdan artan sırada üç basamaklı sayılar yazmalıyız. Onun sayısı da $C(9, 3)$ kadar olduğundan cevap

$$C(10, 4) - C(9, 3) = 210 - 84 = 126$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $a < b < c < d$ *olmak üzere ve d bir tek sayı olmak üzere kaç farklı abcd dört basamaklı sayısı yazmak mümkündür*?

A) 56 B) 64 C) 86 D) 88 E) 90

Çözüm: $a < b < c < d$ ve d'nin tek sayı olması hem *abcd* sayısının rakamlarının farklı olması anlamına gelir hem de d'nin 5, 7 veya 9 değerlerini alabileceğini gösterir.
$d = 5$ iken a, b, c değerleri 1, 2, 3, 4 rakamlarından seçilip küçükten büyüğe dizileceğinden bu $C(4, 3) = 4$ değişik şekilde mümkündür.
$d = 7$ iken a, b, c, d değerleri 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarından seçilip küçükten büyüğe dizileceğinden bu $C(6, 3) = 20$ değişik şekilde mümkündür.
$d = 9$ iken a, b, c, d değerleri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 rakamlarından seçilip küçükten büyüğe dizileceğinden bu $C(8, 3) = 56$ değişik şekilde mümkündür.
O halde toplam $4 + 20 + 56 = 80$ durum vardır.

Doğru cevap: E.

$r \leq n$ olmak üzere, r tane özdeş nesneyi n tane kutuya, herbir kutuya herhangi bir sayıda nesne koymak üzere

$$C\binom{n+r-1}{r}$$

farklı şekilde dağıtabiliriz.

Nesneler farklıyken, her kutudaki nesnelerin dizilişi de önemli olması koşuluyla,

$$P\binom{n+r-1}{r}$$

kadar sayıda dağıtımın sözkonusu olduğunu kanıtlamıştık. Hani komodinli örnek vardı ya, o problemden bahsediyoruz. Burada nesneler özdeş diye dizilişin önemi olmadığından permutasyon yerine kombinasyon yapıyoruz.

Örnek. 3 *özdeş oyuncağı*, 5 *çocuğa herhangi bir şart olmaksızın kaç değişik şekilde dağıtabiliriz*?

A) 5 B) 8 C) 10 D) 15 E) 35

Çözüm: İki farklı yoldan yapacağız.

Birinci yol. Nesneleri özdeş değil de farklı kabul edersek, diziliş önemli olduğunda $P(7, 3)$ kadar değişik yerleştirme mevcut oluyordu. Bu soruda nesneler özdeş olduğundan dizilişin önemi yoktur. O halde permutasyon değil, kombinasyon yapmalıyız. Bu durumda cevap $C(7, 3) = 35$ olmalıdır.

İkinci yol. Formül bilmediğimizi farz edelim. Üç ayrı durum mümkün:
1) Üç oyuncağı da tek çocuğa vermek,
2) İkisini bir çocuğa kalan birini başka bir çocuğa vermek,
3) Üçünü de üç farklı çocuğa vermek.
Her durumu ayrı ayrı inceleyelim, sonuçları toplayalım.

3 oyuncağın 3'ünün de tek bir çocuğa verildiği kaç durum var ona bakalım. Çocukların adları A, B, C, D, E olsun. Hepsini A'ya vermek 1 durumdur, 5 farklı çocuk olduğundan 5 durum oluşur.
Şimdi 2 oyuncağı tek bir çocuğa, kalan 1 oyuncağı da başka bir çocuğa verme durumlarını sayalım. 2 oyuncağı vermek için 5 seçenek var. Kalan oyuncağı vermek için de 4 seçenek var. O halde bu şıkta $5 \cdot 4 = 20$ değişik durum mevcuttur.

Şimdi de 3 oyuncağı 3 farklı çocuğa verme durumlarına bakalım. Bunu bir önceki soruda çözmüştük. Şanslı 3 çocuğu seçelim, yeter. Bu da $C(5, 3) = 10$ değişik durum içeriyordu.
O halde cevap $5 + 20 + 10 = 35$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

$r \geq n$ olmak üzere, r tane özdeş nesneyi n tane kutuya, her kutuda en az 1 tane nesne olacak şekilde yani hiçbir kutu boşta kalmamak üzere $C\binom{r-1}{n-1}$ kadar farklı şekilde yerleştirebiliriz.

Bunun sebebi oldukça basit. Önce her bir kutuyu istenen şartlarda doldururuz. Burada istenen şart her kutuda en az 1 tane nesne olması, bunun için sadece kas hareketi lazım çünkü hatırlarsanız nesneler özdeşti. Şimdi geriye ne kaldı? n tane nesneyi istenen şartları oluşturmak için kullandığımızdan $r - n$ tane nesne kaldı. Bunları kutulara gelişigüzel yerleştirelim. Bu da kanıtladığımız üzere;

$$C\binom{n+(r-n)-1}{(r-n)} = C\binom{r-1}{r-n} = C\binom{r-1}{n-1}$$

değişik şekilde mümkündür.

Örnek. 5 *özdeş oyuncak*, 3 *çocuğa*, *her birine en az* 1 *oyuncak vermek kaydıyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir*?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 21

Çözüm: Buna birkaç çözüm birden yapalım.

Birinci yol. Problemde hiçbir çocuğu ağlatmamamız isteniyor. O zaman ilk başta herhangi 3 oyuncağı alıp, üç çocuğa da birer birer verelim. Oyuncaklar özdeş olduğundan hangi 3 oyuncağı aldığımızın önemi yoktur. Artık elimizde 2 özdeş oyuncak var. Önümüzde de oyuncak isteyen ama ağlamayan 3 çocuk var. Gelişigüzel dağıtacağız. Bunun sayısının $C\binom{n+r-1}{r}$ olduğunu kanıtlamıştık. 2 özdeş nesneyi, 3 kutuya herhangi bir şart olmaksızın $C(4, 2) = 6$ değişik şekilde yerleştirebileceğimizden 2 özdeş oyuncağı, 3 bebeğe herhangi bir şart olmaksızın 6 değişik şekilde verebiliriz.

İkinci yol. Burada anlatacağımız tekniği çok iyi okumanızı öneririm. Başlıyorum.

5 özdeş oyuncağı 5 tane O harfiyle gösterelim.

$$O \ O \ O \ O \ O$$

Şimdi bu O'ların arasındaki boşluklardan canınızın istediği iki tanesine birer virgül koyun. Örneğin,

$$O, O \ O \ O, O$$

olsun. Buradaki iki virgül aslında üç çocuğu birbirinden ayırıyor gibi düşünün. Yani, birinci virgüle kadar 1 tane O olması birinci çocuğun 1 tane oyuncak aldığı, birinci ile ikinci virgül arasında 3 tane O olması ikinci çocuğun 3 tane oyuncak aldığı ve son olarak ikinci virgülden sonra 1 tane O olması da üçüncü çocuğun 1 tane oyuncak aldığı anlamına gelmektedir. O'ların en başına veya O'ların en sonuna virgül koymadığınız sürece, bir de aynı boşluğa iki tane virgül koymadığınız sürece hiçbir çocuk 0 tane oyuncak almayacaktır. Demek ki kaç değişik yere virgül koyabileceğimizin sayısı bize problemi çözdürecektir. Toplam 5 tane O olduğundan 4 aralık vardır. Bu 4 aralığın 2'sini $C(4, 2) = 6$ değişik şekilde seçebileceğimizden sorunun cevabı 6 olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Şimdi aynı mantıkla başka bir soru çözelim. Soru görünüşte bu soruya hiç benzemese de aslında bu sorudan zerre-i miskal kadar farkı yoktur. ☺ İzleyin, görün!

Örnek. *a*, *b*, *c*, *d birer sayma sayısı olmak üzere*

$$a + b + c + d = 20$$

denklemini sağlayan kaç farklı (*a*, *b*, *c*, *d*) *dörtlüsü yazılabilir*?

A) $\binom{19}{3}$ B) $\binom{19}{4}$ C) $\binom{20}{3}$ D) $\binom{20}{4}$ E) $\binom{23}{3}$

Çözüm: Yan yana 20 tane 1 yazın…

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Şimdi canınızın istediği 3 yere birer virgül koyun… Örneğin,

1 1 1 1**,** 1 1**,** 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1**,** 1 1 1

olsun. İlk virgülden önce 4 tane 1 var, birinciyle ikinci virgül arasında 2 tane 1 var, ikinciyle üçüncü virgül arasında 11 tane 1 var, son virgülden sonraysa 3 tane 1 var. Anlayacağınız bu 1'ler *a*, *b*, *c*, *d*'leri simgeleyecek. Yukardaki ayrımdan

$$a = 4,\ b = 2,\ c = 11 \text{ ve } d = 3$$

olduğu anlaşılmalıdır. Virgülleri nereye koyarsanız koyun, 1'lerin adedi hep 20 olacak, dolayısıyla *a*, *b*, *c*, *d* değerlerinin toplamı hep 20 kalacak. O halde bu 3 virgülü kaç değişik şekilde koyabileceğimizi bulmalıyız. Peki, virgül koyma için 20 tane 1 arasında kaç boşluk var? 19 değil mi? 19 boşluktan 3 tanesini seçip, bu boşluklara virgül koyacağız.

Sonuç olarak bu seçim $C(19, 3)$ kadar yapılabilir. O halde $C(19, 3)$ kadar değişik (*a*, *b*, *c*, *d*) sıralı dörtlüsü yazılabilir.

Doğru cevap: A.

Sonuç. Sayma sayıları kümesinde

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = m$$

eşitliğini sağlayan $C\binom{m-1}{n-1}$ tane $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ sıralı n'li vardır.

Örnek. *a*, *b*, *c*, *d*, *e sayıları birer sayma sayısıdır.*

$$a + b + c + d + e = 20$$
$$a + b + c = 12$$

denklemini sağlayan kaç farklı (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) *beşlisi yazılabilir*?

A) 240 B) 385 C) 415 D) 480 E) 770

Çözüm: $a + b + c = 12$ ise $d + e = 8$ olmalıdır. İlk eşitliği sağlayan $C(11, 2) = 55$ kadar farklı (*a*, *b*, *c*) üçlüsü vardır. Bu kadar üçlünün her biri için de $C(7, 1) = 7$ kadar farklı (*d*, *e*) ikilisi mevcuttur. O halde $55 \cdot 7 = 385$ farklı (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) sıralı beşlisi yazabiliriz.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir yayınevine ait bir dağıtım şirketi, iki kitapçıya A kitabından 13 tane, B kitabından 11 tane, C kitabından 8 tane dağıtacaktır. Kitapçılardan herhangi birine A'nın B'nin veya C'nin tamamını bırakması yasak olduğuna göre, dağıtımı kaç farklı şekilde yapabilir?*

A) 70 B) 84 C) 120 D) 840 E) 920

Çözüm: *A* kitabının *a* tanesini birinci kitapçıya, *b* tanesini ikinci kitapçıya dağıtmış olsun. $a + b = 13$ eşitliğinin sayma sayıları kümesinde çözülmesi gerekir. Bu da $13 - 1 = 12$ farklı çözüm demektir. O halde B kitabını dağıtmak için $11 - 1 = 10$, C kitabını dağıtmak içinse $8 - 1 = 7$ farklı seçenek vardır. Bu durumda $12 \cdot 10 \cdot 7 = 840$ farklı dağıtım mümkündür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir sınıfta 1 öğretmen, 9 öğrenci, 2 kapı ve 3 pencere bulunuyor. Bir yangın halinde, her çıkış yerinden en az bir kimse çıkmak şartıyla öğretmen ve öğrenciler kaç değişik şekilde dershaneyi boşaltabilirler?*

A) 252 B) 172 C) 126 D) 112 E) 108

Çözüm: Toplam 5 çıkış yeri var. Bu çıkış yerlerinden çıkıp da kendini kurtaran adam sayıları *a*, *b*, *c*, *d*, *e* olsun. Problem $a + b + c + d + e = 10$ eşitliğini sağlayan kaç sayma sayısının olduğu üzerine kurulmuştur. Bunun sayısının

$$C(10-1, 5-1) = 126$$

olduğunu biliyoruz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İç açı ölçüleri derece cinsinden tam sayı olup, çevreleri 1 birim olan kaç farklı ABC üçgeni vardır?*

A) $\binom{178}{2}$ B) $\binom{179}{2}$ C) $\binom{179}{3}$ D) $\binom{180}{2}$ E) $\binom{180}{3}$

Çözüm: *ABC* üçgeninde $m(A) = \alpha^o$, $m(B) = \beta^o$ ve $m(C) = \theta^o$ olsun. $\alpha + \beta + \theta = 180$ eşitliğini sağlayan kaç farklı (α, β, θ) sıralı üçlüsü olduğunu bulmamız gerekecek. Bu ölçülerden herhangi biri 0 olamayacağından eşitliği sayma sayıları kümesinde çözeceğiz. Bunun sayısının da

$$C(179, 2) = 15931$$

olduğunu biliyoruz.

Doğru cevap: B.

Yukardaki çözümde

$$m(A) = 30^o,\ m(B) = 60^o \text{ ve } m(C) = 90^o$$

olan *ABC* üçgeniyle

$$m(A) = 60^o,\ m(B) = 30^o \text{ ve } m(C) = 90^o$$

olan *ABC* üçgeni farklı sayıldılar. Şimdi tüm açı ölçüleri olarak birbirlerinden farklı olan üçgenlerin adedini bulmayı öğreneceğiz. Yani A.A.benzerliğine geçiş yok!

Örnek [İhsan YÜCEL]. *İç açı ölçüleri derece cinsinden tam sayı olup, hiçbiri birbiriyle benzer olmayan kaç farklı üçgen vardır?*

A) 15931 B) 15930 C) 15921 D) 2700 E) 2699

Çözüm: Bir önceki soruda tüm çeşitkenar üçgenler 6'şer kez, eşkenar olmayan ikizkenar üçgenler 3'er kez, eşkenar üçgen de 1 tane sayılarak 15931 sayısı elde edilmiştir. Bakalım kaç tane ikizkenar üçgen var? Tepe açısı 2^o, 4^o, 6^o, …, 178^o olan ikizkenar üçgenler sayısı 89'dur fakat bunların içinde eşkenar üçgen de vardır. O halde eşkenar olmayan ikizkenar üçgen sayısı 88'dir.

6·Çeşitkenar + 3·İkizkenar + 1·Eşkenar = 15931

denkleminden $Ç = 2611$ bulunur. $İ = 88$ ve $E = 1$ olduğunu bulmuştuk zaten. O halde

$$2611 + 88 + 1 = 2700$$

tane farklı üçgen mevcuttur.

Doğru cevap: D.

Peki, küme değişirse n'olur? Yani sayma sayıları kümesinde değil de, örneğin doğal sayılar kümesinde bu problemi çözebilir miyiz? Tabi ki çözebiliriz ama teknik biraz değişir. Çünkü doğal sayılar kümesinde artık $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sayılarının 0 olma hakları var, yani virgül tekniğini kullanmak istersek bir boşluğa 2, hatta daha çok virgül koyabiliriz, başka bir deyişle bazı çocuklara oyuncak vermeme hakkımız doğdu yani en baştan çocukları susturmak için çocuk sayısı kadar oyuncağı alıp dağıtmamıza gerek yok. Peki o zaman bunu nasıl halledeceğiz? Takip edin…

$r \geq n$ olmak üzere, *r* tane özdeş nesneyi, *n* tane kutuya herhangi bir şart olmaksızın

$$C\binom{n+r-1}{n-1}$$

değişik şekilde dağıtabiliriz.

Bunu, belki de yadırgayacağınız bir şekilde çözeceğim. Eğer aklınıza yatmaz veya yatar da sevmezseniz, hemen ardından vereceğim örneklerde kullandığım diğer metotlara da bir göz atınız.

Bir an için elinizde *r* tane nesne olup da herhangi sayıda dağıtmak yerine, kutu sayısı kadar daha fazla yani $r + n$ tane nesneniz olduğunu ve her kutuya en az 1 tane nesne koyma şartınızın olduğunu düşünün. Hemen *n* kutuya birer tane koyun, ilk başladığınız yere geldiniz değil mi? Ama problemi çözdük, haberiniz yok!

$r + n$ tane nesne *n* kutuya, her birine en az 1 tane koyma şartıyla $C\binom{n+r-1}{n-1}$ kadar farklı şekilde dağıtılır.

Örnek. *a, b, c, d birer doğal sayı olmak üzere*

$$a+b+c+d=20$$

denklemini sağlayan kaç farklı (a, b, c, d) dörtlüsü yazılabilir?

A) $\binom{19}{3}$ B) $\binom{19}{4}$ C) $\binom{20}{3}$ D) $\binom{20}{4}$ E) $\binom{23}{3}$

Çözüm: Bu problemi sayma sayılar kümesinde çözmeyi öğrenmiştik. İşin kolayına kaçıp, problemi sayma sayılar kümesinde sorulmuş gibi bir duruma sokacağız.
a, b, c, d birer doğal sayıysa $a+1$, $b+1$, $c+1$ ve $d+1$ birer sayma sayısıdır. Haksız mıyım?

$$a+1=a'$$
$$b+1=b'$$
$$c+1=c'$$
$$d+1=d'$$

olsun. $a+b+c+d=20$ ise $a'+b'+c'+d'=24$ olduğunu da biliyoruz. O halde $a+b+c+d=20$ denklemini doğal sayılar kümesinde çözene kadar

$$a'+b'+c'+d'=24$$

denklemini sayma sayıları kümesinde çözelim. Soru bu haliyle çerez zaten, cevap $C(23, 3)$ olmalı.

Doğru cevap: E.

Sonuç. Doğal sayılar kümesinde

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=m$$

eşitliğini sağlayan $C\binom{m+n-1}{n-1}$ tane (x_1, x_2,…,x_n) sıralı n'li vardır.

Yukardaki bu sonucu birazdan göstereceğimiz binom problemlerine veya oyuncak-çocuk problemine de uyarlamak mümkündür. Hatta daha birçok probleme… Hemen örneklerimizi verelim.

Örnek. $(x+y+z+t)^{20}$ *açılımında kaç farklı terim vardır?*

A) $\binom{19}{3}$ B) $\binom{19}{4}$ C) $\binom{20}{3}$ D) $\binom{20}{4}$ E) $\binom{23}{3}$

Çözüm: Bu açılımın herhangi bir terimi, k katsayıyı simgelemek üzere $k\left(x^a y^b z^c t^d\right)$ şeklindedir. Diğer yandan a, b, c, d'lerin birer doğal sayı ve $a+b+c+d=20$ eşitliğini sağlaması gerektiğini biliyoruz. O halde yukarda da izah ettiğimiz üzere cevap $C(23, 3)$ olmalı...

Doğru cevap: E.

Örnek. *5 özdeş oyuncak, 3 çocuğa, herhangi bir şart olmaksızın kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 21

Çözüm: Üç farklı yoldan yapacağız.

Birinci yol. a, b, c değerlerini dağıtım sonrasında üç çocuğun alacağı oyuncak sayısı gibi düşünürsek, 5 özdeş oyuncağı, 3 çocuğa, herhangi bir şart olmaksızın dağıtma sayısıyla, $a+b+c=5$ denkleminin doğal sayıları kümesindeki çözüm sayısı aynıdır. Bu da kanıtladığımız formül gereğince

$$C\binom{5+3-1}{3-1}=C\binom{7}{2}=21$$

olmalıdır.

İkinci yol. Sanki 8 özdeş oyuncağınız varmış da 3 çocuğun herbirine en az 1 tane vermek zorundaymışsınız gibi düşünün. Herhangi 3 tane oyuncağı 3 çocuğa verdikten sonra problem orijinal haline döner. Biz de bu arada çoktaaan atı alıp Üsküdar'ı geçmiş oluruz. Çünkü 8 özdeş oyuncağı, 3 çocuğa her birine en az 1 oyuncak vermek koşuluyla dağıtmak, $a+b+c=8$ denklemini sayma sayıları kümesinde çözmek demektir. Cevap da dilimizde tüy bittiği üzere $C(7, 2)=21$ olur.

Üçüncü yol. 5 özdeş oyuncağı 5 tane O harfiyle gösterelim.

$$O\ O\ O\ O\ O$$

Koyacağımız virgüller, her çocuğun kaç tane oyuncak aldığını anlatacak bize. Tabi burada herhangi bir çocuk hiç oyuncak almayabileceğinden ilk virgülü koymak için 4 değil, 6 farklı seçeneğimiz var. Örneğin O'ların en başına virgül koymak birinci çocuk 0 oyuncak aldı yani hiç oyuncak almadı demek olacak. Şimdi gelelim ikinci virgülü kaç değişik yere koyabileceğimize. Birinci virgülü ikinci O'yla üçüncü O arasında koyduğumuzu farzedelim.

$$O\ O, O\ O\ O$$

Birinci virgülü nereye koyarsanız koyun onun solu ve sağı olmak üzere ikinci virgüle 1 tane fazladan yer açılmış demek olacak, demek ki ikinci virgül için 6 değil 7 farklı seçenek vardır. Fakat soluna koymak da birinci çocuk 2 tane, ikinci çocuk 0 tane, üçüncü çocuk 3 tane oyuncak aldı demek olacak, sağına koymak da. Yani her durumda her seçeneği 2 kere saymış olacağız ki bunun için bulduğumuz değeri 2'ye bölmeliyiz. O halde cevap $\frac{6\cdot 7}{2}=21$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Şimdi şartları daha oynak olan bir örnek verelim.

Örnek. *a, b, c, d tam sayıları $a > -3$, $b > 1$, $c > 2$, $d > 4$ koşullarını sağlamak üzere*

$$a + b + c + d = 20$$

denklemini sağlayan kaç farklı (a, b, c, d) sıralı dörtlüsü yazılabilir?

A) $\binom{15}{3}$ B) $\binom{16}{3}$ C) $\binom{20}{3}$ D) $\binom{23}{3}$ E) $\binom{24}{3}$

Çözüm: Korkacak bir şey yok. Eşeğe altın semer takmışlar, eşek gene eşek! Yine işin kolayına kaçıp, problemi sayma sayılar kümesinde sorulmuş gibi bir duruma sokacağız. a, b, c, d birer tam sayıyken, $a > -3$ ise $a + 3$ bir sayma sayısıdır. Aynı şekilde $b > 1$ ise $b - 1$, $c > 2$ ise $c - 2$ ve $d > 4$ ise $d - 4$ birer sayma sayısıdır.

$$a + 3 = a'$$
$$b - 1 = b'$$
$$c - 2 = c'$$
$$d - 4 = d'$$

olsun. $a + b + c + d = 20$ ise $a' + b' + c' + d' = 16$ olduğunu da biliyoruz. O halde $a + b + c + d = 20$ denklemini tamsayılar kümesinde çözene kadar

$$a' + b' + c' + d' = 16$$

denklemini sayma sayıları kümesinde çözelim. Bunu defalarca çözdük, cevap $C(15, 3)$ olmalı...

Doğru cevap: A.

Örnek. *a, b, c, d sayıları birer doğal sayıdır.*

$$a + b + c + d \le 20$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (a, b, c, d) sıralı dörtlüsü yazılabilir?

A) $\binom{20}{4}$ B) $\binom{22}{4}$ C) $\binom{23}{4}$ D) $\binom{24}{4}$ E) $\binom{24}{3}$

Çözüm: İlk etapta aklımıza şöyle bir çözüm geliyor:

$$a + b + c + d = 20$$
$$a + b + c + d = 19$$
$$\ldots$$
$$a + b + c + d = 2$$
$$a + b + c + d = 1$$
$$a + b + c + d = 0$$

eşitliklerini sağlayan doğal sayılar kümesinde kaç farklı (a, b, c, d) dörtlüsü olduğunu bulmayı öğrendiğimiz için her birini bulur, toplarız. Haklısınız, bu doğru cevabı verecektir ama çözüm oldukça uzun sürer. Uzun sürmese de sadeleştirmeyi beceremeyebiliriz. Örneğin bu sorunun cevabı, bu hikayeye göre

$$\binom{23}{3} + \binom{22}{3} + \binom{21}{3} + \ldots + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}$$

olmalıdır. Şıkların hangisi buna eşit anlayabildiniz mi? Ben anlayamadım. Bir de şu çözüme bakın:
$a + b + c + d \le 20$ ifadesini bir e doğal sayısı için $a + b + c + d + e = 20$ şeklinde yazabiliriz. O halde cevap $C(24, 4)$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Yani, farkında olmadan

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \ldots + \binom{21}{3} + \binom{22}{3} + \binom{23}{3} = \binom{24}{4}$$

diye bir eşitlik bulduk.

Sonuç. Bu çözüm yolunu genellersek, şu eşitliği kanıtlamış oluruz:

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{r+n-1}{r} + \binom{r+n}{r} = \binom{r+n+1}{r+1}$$

Örnek [Tübitak 2006]. $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{13} \le 2006$ *eşitsizliğini sağlayan kaç farklı ($x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{13}$) pozitif tam sayı onüçlüsü vardır?*

A) $\dfrac{2006!}{13!\cdot 1993!}$ B) $\dfrac{2006!}{14!\cdot 1992!}$ C) $\dfrac{1993!}{12!\cdot 1881!}$

D) $\dfrac{1993!}{13!\cdot 1980!}$ E) Hiçbiri

Çözüm: Verilen eşitsizliği bir x_{14} pozitif tamsayı için

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{13} + x_{14} = 2007$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliğin de pozitif tamsayılar yani sayma sayıları kümesinde $\binom{2006}{13}$ farklı çözümü olduğunu biliyoruz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bileşenlerinin çarpımı 120 olacak şekilde kaç farklı (a, b, c) sıralı üçlüsü yazılabilir?*

A) 6 B) 9 C) 10 D) 60 E) 90

Çözüm: $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ olduğundan elimizde 3 tane 2, 1 tane 3 ve 1 tane 5 var. a, b, c değerlerini de birer kutu olarak düşünelim. Elimizdeki sayıları bu kutulara kaç farklı şekilde dağıtabileceğimizi bulmalıyız. Çünkü sayıları dağıtarak elimizdekileri bitirirsek, kutudaki sayıların çarpımı her defasında 120 olacaktır.

Eğer üç 2'yi de aynı kutuya koyacaksak bunun için 3 seçenek var. İkisini bir kutuya, birini başka bir kutuya koyacaksak bunun için 6 seçenek var. her birini ayrı kutuya koyacaksak bunun için de 1 seçenek olduğundan 2'leri dağıtmak için 10 seçenek mevcuttur. Elimizde sadece 1 tane 3 olduğundan 3'ü dağıtmak için 3 seçenek vardır. Aynı durum 1 tane 5 için de böyledir. Dolayısıyla $10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$ değişik durum mümkündür.

Doğru cevap: E.

Soruyu çözdük ama adetler daha fazla olsaydı ne yapacaktık? Onun için asıl çözümü de verelim.

Elimizde 3 tane 2 olduğundan dağıtım sonrasında a, b, c kutularındaki 2 adedi 3 olacaktır. Bunu $a + b + c = 3$ yazarak gösterelim. Bu denklemin doğal sayılardaki çözümü lazım bize, çünkü bazı kutulara 2'yi atmayabiliriz. Bunun sayısının da $C(5, 2) = 10$ olduğunu biliyoruz. Aynı denklemi 3 ve 5 için çözelim. Adetleri 1 olduğundan $a + b + c = 1$ denkleminin doğal sayılarda çözülmesi gerekir. Bunun sayısı da $C(3, 2) = 3$'tür. O halde toplam durum sayısı $10·3·3 = 90$ olmalıdır.

Örnek. 10000'*den küçük olan doğal sayıların kaç tanesinin rakamları toplamı* 9'*dur*?

A) 220 B) 200 C) 190 D) 160 E) 140

Çözüm: 10000'den küçük olan doğal sayıları $abcd$ ile gösterelim. $a + b + c + d = 9$ eşitliğinin sağlanması bekleniyor. Sayının 4 basamaklı olma şartı olmadığından a değeri 0 da olabilir. Hatta hem a, hem de b sıfır olursa, koşulu sağlayan 3 basamaklı sayıları, hem a, hem b, hem de c sıfır olursa koşulu sağlayan üç basamaklı sayıları hesaplamış olacağız. Anlayacağınız yazdığımız eşitliği doğal sayılar kümesinde çözeceğiz. Sayma sayıları olsaydı, $C(8, 3)$ kadar çözüm olurdu, doğal sayı olduğundan 4 değişik değişken için toplama 4 eklemeliyiz, o halde çözüm sayısı $C(12, 3) = 220$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *İlk* 30000 *doğal sayının kaç tanesinin rakamları toplamı* 11'*dir*?

A) 400 B) 550 C) 590 D) 650 E) 710

Çözüm: İlk 30000 doğal sayı, 0'dan 29999'a kadar olan sayılardır. Bu sayıları bir an için 00000'dan 29999'a kadar gibi düşünün. Yani o sayıları $abcde$ ile gösterelim.

$$a + b + c + d + e = 11$$

eşitliğinin doğal sayılarda $C(15, 4)$ kadar değişik çözümünün olduğunu biliyoruz. Fakat bu soruda bazı şartlarımız var.

$$a < 3,\ b < 10,\ c < 10,\ d < 10,\ e < 10$$

olması gerekiyor.

Şimdi bu şartları sağlamadan yukardaki denklemi sağlayan çözümleri, ilk çözümlerden atmalıyız.

$a > 2$ iken $C(13, 4)$ kadar,
$b > 9$ iken $C(6, 4)$ kadar,
$c > 9$ iken $C(6, 4)$ kadar,
$d > 9$ iken $C(6, 4)$ kadar ve
$e > 9$ iken $C(6, 4)$ kadar

çözüm verilen şartlara uymadığından, ilk çözümlerden atalım. O halde ilk 30000 doğal sayı içinde rakamları toplamı 11 olan

$$\binom{15}{4} - \binom{13}{4} - 4\binom{6}{4} = 590$$

tane sayı varmış.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir kutuda 5 özdeş siyah, 4 özdeş kırmızı, 3 özdeş mavi top vardır. İçinde her renkten en az 1 tane top bulunduran kaç farklı 6 toplu grup yapılabilir?*

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: Madem her renkten en az 1 tane olacak, kendi ellerimizle gruba 1 siyah, 1 kırmızı ve 1 mavi top koyalım. Geriye kaldı 4 siyah, 3 kırmızı ve 2 mavi olmak üzere 9 top. Şimdi bunlardan 3 tanesini daha seçeceğiz. Toplar özdeş olduğundan önce hangisini değil, hangi renkten kaç tane aldığımız önemlidir.
Aldığımız siyah top sayısını a'yla, kırmızı top sayısını b'yle, mavi top sayısını da c'yle gösterelim. $a + b + c = 3$ olacak ve denklem doğal sayılar kümesinde çözülecek. Onun sayısı da anlattığımız üzere $C(5, 2) = 10$'dur. Fakat bu çözümler içinde (0, 0, 3) çözümü de var ama 3 tane mavi top kalmadığından bunu çözümü dahil etmeyeceğiz, dolayısıyla ancak 9 farklı grup oluşturmak mümkündür.

Doğru cevap: B.

Örnek. 5 *farklı nesne*, 3 *kutuya*, *kutulardaki diziliş sırası önemli olma ve her birinde en az* 1 *nesne olma koşuluyla kaç farklı şekilde yerleştirilebilir*?

A) 60 B) 120 C) 240 D) 360 E) 720

Çözüm: İki farklı yoldan yapacağız.

Birinci yol. Dağıtımdan sonra bu üç kutuda bulunan nesne sayıları a, b, c olsun. Demek ki

$$a + b + c = 5$$

olmalı. Bir an için nesneleri özdeş farzedelim. Her kutuya en az bir nesne konması gerektiğinden denklemi sayma sayıları kümesinde çözmeliyiz. Bu da anlattığımız üzere $C(4, 2)$ kadar değişik şekilde mümkündür. Şimdi gerçeğe dönelim. Nesneler özdeş değil farklı olduklarından aralarında 5! kadar yer değiştirebilirler. Bu durumda cevabımız

$$5!·C(4, 2) = 120·6 = 720$$

olmalıdır.

İkinci yol. Nesneleri yine özdeş kabul edelim. Herhangi 3 tanesini alıp, 3 kutuya birer birer koyalım. Sonra kalan 2 taneyi 3 kutuya gelişigüzel yerleştirelim. Bunu

$$C\binom{3+2-1}{3-1} = C\binom{4}{2} = 6$$

şekilde yapabiliriz. Nesneler özdeş değil farklı olduklarından aralarında 5! kadar yer değiştirebilirler. Bu durumda cevabımız

$$5!·C(4, 2) = 120·6 = 720$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *5 farklı oyuncak, 3 çocuğa, her birinde en az 1 oyuncak olma koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

A) 60 B) 150 C) 180 D) 240 E) 360

Çözüm: Bir önceki soruda diziliş önemliydi ama burada değil. Bu yüzden aynı çözümü yapamayız. Soru kalıbına dikkat ederseniz 5 *elemanlı bir kümeden* 3 *elemanlı bir kümeye tanımlanabilecek örten fonksiyon sayısı* problemiyle aynı olduğunu anlarsınız. Bu sayıyı da nasıl bulacağımızı fonksiyon notlarımızda öğrenmiştik.

$s(A) = a$, $s(B) = b$ ve $a > b$ olmak üzere A kümesinden B kümesine tanımlanabilecek örten fonksiyon sayısı

$$\sum_{k=0}^{b}\left((-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^a\right)$$

olarak bulunuyordu. Matematik Dünyası dergisinin 2003 Kış Sayısı'nda kanıtı bulabilirsiniz.

O halde a yerine 5 ve b yerine 3 yazarsak

$$\sum_{k=0}^{3}\left((-1)^k\binom{3}{k}(3-k)^5\right) = 3^5 - 3\cdot 2^5 + 3\cdot 1^5 = 150$$

Doğru cevap: B.

Şimdi bu formül de nerden çıktı diyor olabilirsiniz. Hemen kanıtlayalım. Yalnız a, b, k'ler arasında boğulmayın diye bunu da sayısal verilerle izah edeyim. Genel formüle siz oradan ulaşırsınız. ☺

5 elemanlı bir kümeden 3 elemanlı bir kümeye toplam 3^5 farklı fonksiyon tanımlanabilir. Şimdi bu fonksiyonlardan, görüntü kümesi 2 elemanlı olanları ve görüntü kümesi 1 elemanlı olanları çıkartacağız, geriye 3 elemanın 3'üyle de eşleşen fonksiyonlar kalacak yani tam da istediğimiz üzere örten olanlar…

3 elemanlı değer kümesinden herhangi iki eleman seçelim. Sadece bu iki elemana giden 2^5 farklı fonksiyon tanımlanabilir ama bunların bazılarının görüntü kümesi de 1 elemanlıdır. Bakalım sadece 1 tane elemanla eşleşen kaç fonksiyon varmış? $\binom{2}{1}\cdot 1^5$ tane olduğunu kolaylıkla bulabilirsiniz. Bunu 2^5'ten çıkartalım.

$$2^5 - \binom{2}{1}\cdot 1^5$$

Herhangi iki eleman için bu kadar eşleşme varsa, değer kümesinden herhangi iki elemanı $C(3, 2)$ kadar değişik şekilde seçebileceğimizden, görüntü kümesi 2 elemanlı olan

$$\binom{3}{2}\cdot\left(2^5 - \binom{2}{1}\cdot 1^5\right)$$

kadar farklı fonksiyon tanımlanabilir.

Şimdi de tek bir elemana giden fonksiyon sayısını bulalım. Bunu hesaplamak çok kolay: $C(3, 1)\cdot 1^5$.

O halde örten fonksiyon sayısı şu olmalıdır:

$$\underbrace{3^5}_{\text{Tanımlanabilecek tüm fonksiyonların sayısı}} - \underbrace{\binom{3}{2}\cdot\left(2^5 - \binom{2}{1}\cdot 1^5\right)}_{\text{Görüntü kümesi 2 elemanlı olan fonksiyon sayısı}} - \underbrace{\binom{3}{1}\cdot 1^5}_{\text{Görüntü kümesi 1 elemanlı olan fonksiyon sayısı}}$$

Hesaplayalım bakalım:

$$3^5 - \binom{3}{2}\cdot 2^5 + \binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot 1^5 - \binom{3}{1}\cdot 1^5 = 3^5 - \binom{3}{2}\cdot 2^5 + \binom{3}{1}\cdot 1^5$$

Bakın formülden doğacak sonucu elde ettik. Bunu da hesaplarsak 150 olduğu çıkıyor.

Bozuk düzen dağılımları. Bir bozuk düzen problemi, hiçbir nesnenin olması gerektiği yerde olmadığı durumların sayısı problemidir. Örneğin (1, 2, 3) sıralı üçlüsünü düşünelim. 1'in birinci bileşen olmadığı, 2'nin ikinci bileşen olmadığı, 3'ün de üçüncü bileşen olmadığı kaç sıralı üçlü yazabileceğimizi bulalım. Kolaylıkla görüleceği

üzere (2, 3, 1) ve (3, 1, 2) üçlülerinden başka üçlü mümkün değildir. Demek ki 2 taneymiş. Fakat adetler çoğaldıkça çözüm bu kadar kolay yapılamaz. Hemen mertebeyi 1 yükseltelim: (1, 2, 3, 4) dörtlüsünü düşünelim. Hiçbir rakamın şu an bulundukları konumda olmadıkları kaç dörtlü yazılabilir? Önce parmakla sayalım:

Başa 2'nin geldiği durumlar:
(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3) olmak üzere 3 tane,

Başa 3'ün geldiği durumlar:
(3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1) olmak üzere 3 tane,

Başa 4'ün geldiği durumlar:
(4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1) olmak üzere 3 tanedir.
Demek ki 9 farklı durum mümkünmüş.

Hadi bunu da sayarak hallettik de n tane nesne için bu problem nasıl çözülecek? Sean Soni, *Art of Problem Solving* isimli kitabının *Derangements* bölümünde bunun formülünü vermiş. Sean Soni sağolsun yazmış da, Ali Ergin bunu grubumuza yollamasa haberimiz olmayacaktı. Huzurunuzda ikisine de teşekkürler!

n tane nesnenin bozuk düzende diziliş sayısını $!n$ ile gösterelim. Bozuk düzen gösterimi ancak böyle bozuk olabilirdi. ☺ Bu sayı $!n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ ile hesaplanır.

Bakalım formül düzgün çalışıyor mu? 3 nesnenin bozuk düzende diziliş sayısı 2, 4 nesnenin ise 9'du.

$$!3 = 3!\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{k!} = 6\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = 6\cdot\frac{1}{3} = 2$$

$$!4 = 4!\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{k!} = 24\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right) = 24\cdot\frac{9}{24} = 9$$

Doğru gibi! ☺

CEVAPLI TEST 1

1.
10 mektup 3 posta kutusuna belli dört mektup aynı kutuya atılmak şartıyla kaç farklı şekilde atılabilir?

A) 3^5 B) 3^6 C) 3^7 D) 3^8 E) 5^3

2.
Bir komodinin yeterince büyük beş çekmecesi vardır.
3 farklı gömleği, bu 4 çekmeceye, içindeki sıra da önemli olmak kaydıyla kaç farklı şekilde koyabiliriz?

A) 15 B) 20 C) 56 D) 60 E) 120

3.
Yeterince büyük dört bölmesi bulunan bir kitaplık rafına 8 farklı kitap, bölmelerdeki sıra da önemli olmak kaydıyla kaç farklı şekilde dizilebilir?

A) $P\binom{11}{8}$ B) $P\binom{12}{8}$ C) $P\binom{11}{3}$ D) $\binom{11}{4}$ E) $P\binom{12}{4}$

4.
4 oyuncak, 6 çocuğa, her çocuğa en çok 1 tane oyuncak gelme koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

A) $P\binom{6}{2}$ B) $P\binom{6}{4}$ C) $P\binom{9}{2}$ D) $P\binom{9}{4}$ E) $P\binom{9}{6}$

5.
3 özdeş oyuncağı, 8 çocuğa, hiçbirine 1'den fazla oyuncak vermemek üzere kaç değişik şekilde dağıtabiliriz?

A) 11 B) 24 C) 48 D) 56 E) 84

6.
$a > b > c > d$ olmak üzere kaç farklı *abcd* dört basamaklı sayısı yazılabilir?

A) $\binom{9}{4}$ B) $\binom{10}{4}$ C) $\binom{10}{3}$ D) $\binom{9}{3}$ E) $\binom{11}{5}$

7.
3 özdeş oyuncağı, 8 çocuğa herhangi bir şart olmaksızın kaç değişik şekilde dağıtabiliriz?

A) $\binom{11}{8}$ B) $\binom{10}{4}$ C) $\binom{10}{3}$ D) $\binom{9}{3}$ E) $\binom{11}{7}$

8.
8 özdeş oyuncak, 3 çocuğa, her birine en az 1 oyuncak vermek kaydıyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 21

9.
a, b, c, d birer sayma sayısı olmak üzere
$$a + b + c + d = 15$$
denklemini sağlayan kaç farklı (a, b, c, d) dörtlüsü yazılabilir?

A) $\binom{14}{3}$ B) $\binom{15}{3}$ C) $\binom{14}{4}$ D) $\binom{15}{4}$ E) $\binom{18}{3}$

10.
a, b, c, d birer doğal sayı olmak üzere
$$a + b + c + d = 15$$
denklemini sağlayan kaç farklı (a, b, c, d) dörtlüsü yazılabilir?

A) $\binom{19}{4}$ B) $\binom{17}{3}$ C) $\binom{17}{4}$ D) $\binom{18}{4}$ E) $\binom{18}{3}$