İçindekiler

Önsöz

Türkiye'deki Matematik Olimpiyatları Konusunda Kısa Bilgi

Türkiye'de olimpiyat etkinlikleri, **TÜBİTAK** Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı (BİDEB) tarafından yürütülmektedir. Bu çalışmalar hem ulusal düzeyde hem de uluslararası düzeyde yapılmaktadır. Ulusal düzeyde gerçekleştirilen İlköğretim Matematik Olimpiyatı ile Liseler İçin Matematik Olimpiyatları sonuçlarına göre ülkemizi Uluslararası yarışmalarda temsil edecek takımlar belirlenmektedir. Uluslararası Bilim Olimpiyatlarında ülkemizi temsil edecek takımlar matematik olimpiyat kamplarında başarılı olmuş öğrencilerin, çeşitli sınavlar sonucunda seçilmeleriyle oluşmaktadır. Şu ana kadar katıldığımız **Uluslararası Matematik Olimpiyatlarında**, Umut Varolgüneş, Melih Üçer, Ömer Faruk Tekin, Cafer Tayyar Yıldırım, Selim Bahadır (2 kez), Nizameddin Ordulu, Mehmet Bumin Yenmez ülkemize **altın madalya** kazandıran öğrencilerdir.

Son yıllarda, birçok üniversite lise öğrencilerine yönelik olarak matematik olimpiyatları düzenlemektedir. Bunlardan en eskisi Akdeniz Üniversitesi tarafından düzenlenen Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatlarıdır, bu olimpiyat birincisi test ve ikincisi klasik olarak iki aşamada yapılmaktadır. Yine, Fatih, Koç, Doğuş, Mersin, Sabancı üniversiteleri de matematik olimpiyatı düzenleyen üniversitelerden bazılarıdır.

Matematik Olimpiyatlarına Hazırlanan Bir Öğrenci Ne Kazanır?

Matematik olimpiyatlarına hazırlanmak hem zor hem de zevklidir. Matematik olimpiyatlarına hazırlanan bir öğrenci sınavın sonucunda hangi dereceyi alırsa alsın **asla kaybetmez.** Öğrendiği konular ve zor soruların yanında, beynini zorlaması ufkuna açmasına ve ileride zor problemler ile karşılaştığında daha sağlıklı ve daha tutarlı yorumlar yapmasını sağlayacaktır. Sporla uğraşan bir sporcu katıldığı olimpiyatta başarılı olamasa bile, hazırlanma aşamasında vücudunun sağlıklı olması için yaptığı çalışmaların faydasını gördüğü gibi, matematik olimpiyatlarına hazırlanan bir öğrenci de, zor problemlere kafa yormasının sonucu olarak beynini geliştirir. İnsanlar düşündükçe aklını kullandıkça , matematik problemi çözdükçe beyin hücrelerinin yolları açılır. Bilim adamları, normal insanların mevcut beyin kapasitelerinin çok az bir kısmını kullanabildiğini söylemektedirler. Bu kapasite elbette sıradan işlerle uğraşarak, beyni yormayarak, basit ve birbirine benzeyen problemleri çözerek artmayacaktır. Beyni yormak gerekir. **Beyni zorlamak**, sürekli yeni problemlerle meşgul etmek gerekir. Beyin hücreleri kullanılmaz ise kaybedilir. O halde, bir matematik yarışmasına girsek de girmesek de zor sorular ile uğraşmalıyız.

Matematik Olimpiyatlarına Nasıl Hazırlanılmalı?

Matematik Olimpiyatlarına hazırlanmak gerçekten zordur. Zaman ister. Tıpkı olimpiyata hazırlanan bir haltercinin sürekli kendini geliştirmesi, yavaş yavaş ağırlıkları kaldırması ve bunu başarabilmek içinde gerekli zamanı harcayıp vücudunu geliştirmesi gibi, yavaş yavaş ilerlenmesi gereken bir çalışmadır. Olimpiyat sorularını çözmeye yeni başlayan birisine, bazı soruların oldukça zor gelmesi normaldir. Bu biraz bilgiye, biraz tecrübeye biraz da püf noktalı sorulara hazırlıklı olmaya göre değişir. Soruların zorluk derecesi, elbetteki, bir halterin ağırlığı gibi net olarak ifade edilmese de, bildiğiniz bir konuda sorulan bir sorudaki ince bir püf nokta o soruyu çok zor hale getirebilir. Bir soru öğrenildikten sonra kolaydır. Öğreninceye kadar zor bir sorudur. Bu kitabın amaçlarından biri de size göre zor olan soruların sayısının azalmasına yardımcı olmaktır. Olimpiyatlara hazırlanan bir öğrenci herşeyden önce, **kararlı olmalı**, **kendine güvenmeli**, fakat ne kadar kendine güvenirse güvensin yapamayacağı soruların olduğunun farkında olup, çözemediği sorular karşısında umutsuzluğa düşmek yerine, çözemediği soruların çözümlerini öğrenerek ilerlemesi gerektiğinin bilincinde olmalıdır. Kısaca, matematik olimpiyatlarına hazırlık, **kararlılık, sabır ve azim** isteyen bir iştir. **Acele etmemek gerekir.** Hatta bazı soruların çözümü de anlaşılamayabilir veya bir sorunun çözümü öğrenildikten sonra tekrar karşılaşıldığında o soruyu yapamayabilirsiniz. Öğrencilerden, bu konu ile ilgili en çok karşılaştığım soru, "çözümünü gördüğümüz zaman anlıyoruz ama kendimiz yapamıyoruz, ne yapmalıyız?" sorusudur. Aslında bu normaldir. Olimpiyat sorularının kendine has çözme yöntemleri olabilir. Bu yöntemleri bir anda öğrenmek elbette kolay değildir. Bu kitapta konular ve konu ile ilgili sorulan sorular mümkün olduğu kadar, o konuya gelinceye dek öğrenilen bilgileri içerecek şekilde ele alınmıştır. Bir soruyu çözerken, soruyu **önce kendiniz çözmeye çalışınız.** Çözemez iseniz, **çözümünü inceleyip nasıl bir yöntem kullanıldığını inceleyiniz** ve soruda püf nokta var ise, o **püf noktayı** mutlaka görmeden soruyu geçmeyiniz. Sorunun çözümünü anlamaz iseniz, bu konu ile ilgili bilgilerinizin eksik olabileceğini göz önünde bulundurarak umutsuzluğa kapılmayınız. Unutmayın sizi zorlayan her soru sizin için zor ve güzel bir sorudur. Bazı sorularda hata da olabilir. Bu tür hataları bildirirseniz, kitabın bundan sonraki basımlarında daha hatasız olarak size ulaştırabiliriz.

Hangi Ciltte Hangi Konular Var?

Birinci ve ikinci ciltte, olimpiyatlar için en gerekli temel kavramların ve yöntemlerin verilmesi amaçlandı. Bunun için, temel kavramlar, tanımlar, gösterimler verilerek, problem tipleri, çarpanlara ayırma, çözümleme, toplamlar, kombinatorik, binom açılımı, ispat yöntemleri konuları ele alındı.

Üçüncü ciltte ise, sayılar teorisi konusu ele alınarak, bölünebilme, asal sayılar, obeb-okek, modüler aritmetik, Fermat, Euler, Wilson teoremleri, Çin kalan teoremi, denklikler, tamdeğer, konuları verildi.

Dördüncü ciltte ise, fonksiyonlar, polinomlar, polinom denklemler ve eşitsizlikler, diziler, denklemler ve denklem sistemleri konularına yer verildi.

Son cillte ise, logaritma ve trigonometri bilgisi, limit, süreklilik, türev, fonksiyonel denklemler ve eşitsizlikler konuları verildi.

Her bir kitapta öncelikle, **konuya** ve o konu ile ilgili **örnek öğretici olabilecek sorulara** yer verdim. Daha sonra, her bir konu ile ilgili **dünyada değişik olimpiyatlarda sorulmuş soruları** da içeren bir tane çözümlü test koydum. Son olarak da o konu ile ilgili **TÜBİTAK Matematik Olimpiyatlarında çıkmış sorular** ve çözümlerini verdim. Test sorularının bir çoğu aslında, klasik olimpiyat sorularıdır. Bunun yanında, klasik sorular vererek olimpiyatların soru şeklinden uzaklaşmamaya çalıştım. Umarım, faydalı olur.

Başka Hazırlanabileceğimiz Olimpiyat Kitabı Var mı?

Türkiye'de matematik alanında olimpiyatlara hazırlananlar için, Türkçe kaynak oldukça azdır. Aşağıda, matematik olimpiyatlarına hazırlanan öğrenciler için faydalı olacağına inandığım bazı kitapları yazdım.

1. *Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri*, H. İbrahim Karakaş, İlham Aliyev (TÜBİTAK Yayınları).

2. *Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri*, H. İbrahim Karakaş, İlham Aliyev (TÜBİTAK Yayınları).

3. *Ulusal Antalya Matematik Oimpiyatları Sorular ve Çözümler*, İlham Aliyev, Mustafa Özdemir, Dilber Şıhaliyeva (TÜBİTAK Yayınları).

4. *Sonlu Matematik*, Refail Alizade, Ünal Ufuktepe (TÜBİTAK Yayınları).

5. *Meraklısına Matematik*, Recep Yücesan (Zambak Yayınları).

6. *Meraklısına Geometri*, Ömer Gürlü (Zambak Yayınları).

7. *Tübitak Ulusal Matematik Olimpiyat Soru ve Çözümleri*, Mustafa Töngemen, (Altın Nokta Yayınları) (Bu Kitapta Tübitak olimpiyatlarında çıkmış tüm soruların çözümlerini bulabilirsiniz.)

Teşekkür

Öncelikle, Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünde bana çalışma fırsatının yolunu açan, bana her konuda örnek olan, kendisine her zaman müteşekkir olduğum **Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş** hocama, 1996 yılında başlayan matematik olimpiyat sorularına olan ilgimin artarak devam etmesini sağlayan, bu konuda beni teşvik eden, **Prof. Dr. İlham Aliyev** hocama, her konuda beni destekleyen ve yardımcı olan, örnek almaya çalıştığım yüksek lisans ve doktora danışman hocam, **Prof. Dr. Abdullah Aziz Ergin'e** teşekkür ederim. Ayrıca, kitabın hazırlanması sırasında, kitabın hem içeriği hem de düzeni konusunda zaman harcayıp, tavsiye ve düzeltmelerde bulunan **Prof. Dr. Ali Nesin** hocama teşekkür ederim. Soruların ve çözümlerin tashihinde bana yardımcı olan, Yüksek Lisans Öğrencisi **Osman Palancı**'ya, **Yard. Doç. Dr. Gültekin Tınaztepe**'ye ve **Oğuz Yeğin**'e ve kitabın hazırlanma aşamasında bana destek olan eşim **Burcu Özdemir**'e teşekkür ederim. Ayrıca, kendilerinden gerektiği kadar yararlanamadan aramızdan ayrılan değerli hocalarım **Fikri Gökdal** ve **Prof. Dr. Doğan Çoker** hocalarımı da saygıyla anıyorum.

Kısa Özgeçmiş

Mustafa Özdemir, 1975 yılında Konya'nın **Bozkır** ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 1992 yılında girdiği **Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü**'nden 1996 yılında mezun oldu. 1999 - 2007 yılları arasında, **Akdeniz Üniversitesi**, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans ve doktorasını tamamladı. Halen, Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünde çalışmaktadır.

NOT : Hatalı soru çözümleri, baskı hataları, eksik çözümler, yanlış ifade edilişler ile ilgili her türlü hatalarımı **mozdemir@akdeniz.edu.tr** mail adresine gönderirseniz sevinirim.

Toplamlar ve Çarpımlar

Belirli bir kurala uygun şekilde devam eden sayıları toplarken, değişik yöntemler kullanırız. Bu bölümde, bu toplamların sonucunun nasıl bulunacağını, soru tiplerine göre inceleyeceğiz.

1.1 Kesirlere Ayırarak ya da Parçalayarak Toplamların Hesaplanması

Bu tür sorularda toplamdaki her bir terim kesirlere ayırılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılarak toplama işlemi yapılır.

Örnek 1 $S=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{100\cdot 101}=?$

Çözüm : Toplamdaki her bir kesiri,

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ldots,\quad \frac{1}{100\cdot 101}=\frac{1}{100}-\frac{1}{101}$$

biçiminde yazabiliriz. Yani, her bir terimi

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

şeklinde basit kesirlere ayırabiliriz. Bu bağıntıyı S toplamındaki her bir terime uygularsak,

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$$

elde edilir.

Örnek 2 $S=\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\dfrac{1}{101\cdot 105}=?$

Çözüm : Her bir kesiri yine iki kısıma ayırarak çözebiliriz. Kesirin paydasındaki sayılar arasındaki artış miktarının 4 olduğu göz önüne alınarak, verilen toplamdaki her bir terim

$$\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right),\quad \frac{1}{5\cdot 9}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right),\quad \ldots,\quad \frac{1}{101\cdot 105}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{105}\right)$$

olarak yazılabilir. Yani, her bir terim

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(4n+1)}-\frac{1}{(4n+5)}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre, $\dfrac{1}{4}$ parantezine alarak,

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{101}-\frac{1}{105}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{105}\right)=\frac{26}{105}$$

bulunur.

Problem : $\dfrac{1}{11\cdot 4}+\dfrac{1}{18\cdot 11}+\dfrac{1}{25\cdot 18}+\cdots+\dfrac{1}{102\cdot 95}=?$ Yanıt: $\dfrac{7}{204}$

Örnek 3 $\dfrac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\dfrac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\dfrac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\cdots+\dfrac{1}{25\cdot 28\cdot 31}$ *toplamını hesaplayınız.*

Çözüm : Paydada 3 sayının çarpımı olduğundan, iki kesire ayırırken paydadaki ortanca çarpanı iki kesirde de kullanarak parçalayabiliriz. Paydadaki sayılar arasında aritmetik bir artış olduğunu ve en küçük sayı ile en büyük sayı arasındaki farkın 6 olduğuna dikkat ediniz. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 7}\right)\\
\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 10}\right)\\
\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7\cdot 10}-\frac{1}{10\cdot 13}\right)\\
&\vdots\\
\frac{1}{25\cdot 28\cdot 31} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{25\cdot 28}-\frac{1}{28\cdot 31}\right)
\end{aligned}$$

eşitliklerinin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$S=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1\cdot 4}-\frac{1}{28\cdot 31}\right)=\frac{9}{217}$$

elde edilir.

Not : Her bir kesiri nasıl ayırabileceğimizi matematiksel olarak,

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}=\frac{A}{(3n+1)(3n+4)}+\frac{B}{(3n+4)(3n+7)}$$

eşitliğinden A ve B sayıları bulunarak görülebilir. Gerçekten,

$$A+B=0 \text{ ve } 7A+B=1$$

denklemlerinden $A=1/6$ ve $B=-1/6$ bulunur. Böylece, toplamdaki her bir terimi,

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}-\frac{1}{(3n+4)(3n+7)}\right)$$

şeklinde ayırabiliriz.

Problem : $\dfrac{8}{41\cdot 49\cdot 45}+\dfrac{8}{37\cdot 45\cdot 41}+\dfrac{8}{33\cdot 41\cdot 37}+\cdots+\dfrac{8}{1\cdot 9\cdot 5}=?$

Yanıt : $\dfrac{1}{1\cdot 5}-\dfrac{1}{45\cdot 49}=\dfrac{88}{441}$

1.2 Faktöriyel İçeren Toplamların Hesaplanması

Her bir terim, faktöriyelin tanımı kullanılarak, toplandığında birbiri ile sadeleşecek şekilde kısımlara ayrılmaya çalışılır.

Örnek 4 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 100 \cdot 100!$ *toplamını hesaplayınız.*

Çözüm : $k \cdot k! = ((k+1) - 1)\, k! = (k+1)! - k!$ olduğundan, her bir terimi

$$S = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + (101! - 100!)$$

şeklinde yazıp sadeleştirirsek, $S = 101! - 1$ bulunur.

Örnek 5 $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!} = ?$

Çözüm : $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \\ &= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 6 $S = \dfrac{3}{1! + 2! + 3!} + \dfrac{4}{2! + 3! + 4!} + \dfrac{5}{3! + 4! + 5!} + \cdots + \dfrac{100}{98! + 99! + 100!}$ *toplamını hesaplayınız.*

Çözüm : Her bir terim, $\dfrac{(k+2)}{k! + (k+1)! + (k+2)!}$ formundadır. Düzenlersek,

$$\frac{(k+2)}{k! + (k+1)! + (k+2)!} = \frac{k+2}{k!\,(1 + (k+1) + (k+1)\,(k+2))} = \frac{1}{k!\,(k+2)}$$

Bu ifadenin pay ve paydasını $(k+1)$ ile çarpalım ve $k+1$ ifadesi yerine $k+2-1$ yazalım. Bu durumda,

$$\frac{(k+2)}{k! + (k+1)! + (k+2)!} = \frac{k+2-1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$$

elde edilir. Buradan, k yerine 1'den 98'e kadar değerler verilerek,

$$S = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{99!} - \frac{1}{100!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{100!}$$

bulunur.

1.3 Toplanan Terimleri Gruplayarak Toplamın Hesaplanması

Toplamdaki sayılar gruplandığında, her bir grupdaki sayıların toplamı sabit aynı sayıyı veriyorsa toplamı hesaplamak kolaylaşır.

Örnek 7 $\dfrac{1}{3^{-100}+1}+\dfrac{1}{3^{-99}+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^{99}+1}+\dfrac{1}{3^{100}+1}$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm : $\dfrac{1}{3^{-100}+1}+\dfrac{1}{3^{100}+1}=1,\ \dfrac{1}{3^{-99}+1}+\dfrac{1}{3^{99}+1}=1,...$ olduğu kolayca görülebilir. Yani, $n\in\mathbb{Z}$ için,

$$\frac{1}{3^{-n}+1}+\frac{1}{3^{n}+1}=1$$

olduğundan, $n=1,2,...,100$ için, 100 tane 1 vardır. $n=0$ için de,

$$\frac{1}{3^{0}+1}=\frac{1}{2}$$

olduğundan, $S=100+1/2=100,5$ bulunur.

Örnek 8 $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$ *olduğuna göre,*

$$f\left(\tfrac{1}{2007}\right)+f\left(\tfrac{2}{2007}\right)+f\left(\tfrac{3}{2007}\right)+\cdots+f\left(\tfrac{2006}{2007}\right)$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm : Verilen fonksiyon için, $f(x)+f(1-x)=1$ olduğunu kullanacağız. Gerçekten,

$$\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{\frac{9^1}{9^x}}{\frac{9^1}{9^x}+3}=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{3}{3+9^x}=1$$

bulunur. Buna göre,

$$\begin{gathered}f\left(\tfrac{1}{2007}\right)+f\left(\tfrac{2006}{2007}\right)=1,\\ f\left(\tfrac{2}{2007}\right)+f\left(\tfrac{2005}{2007}\right)=1,\\ \vdots\\ f\left(\tfrac{1003}{2007}\right)+f\left(\tfrac{1004}{2007}\right)=1\end{gathered}$$

olacağından $f\left(\tfrac{1}{2007}\right)+f\left(\tfrac{2}{2007}\right)+f\left(\tfrac{3}{2007}\right)+\cdots+f\left(\tfrac{2006}{2007}\right)=1003$ elde edilir.

1.4 Terimlerin Eşlenikleri ile Çarpılarak Toplamın Hesaplanması

Paydasında köklü ifade içeren toplam sorularında, her bir kesir, paydası rasyonel olacak şekilde uygun sayı ile çarpılır.

Örnek 9 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{121}+\sqrt{119}}=?$

Çözüm : Her bir terimin paydasındaki ifadeyi, eşleniğiyle çarparak,

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{121}-\sqrt{119}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{121}-\sqrt{1}\right)=5$$

elde edilir.

Örnek 10 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{26^2}+\sqrt[3]{26\cdot 27}+\sqrt[3]{27^2}}$ *toplamını hesaplayınız.*

Çözüm : Paydadaki ifadeler, $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ formundadır. Buna göre, her bir kesiri, $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ ile çarpıp,

$$\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)=a-b$$

olduğu kullanılırsa,

$$A=\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}{2-3}+\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}}{3-4}+\cdots+\frac{\sqrt[3]{26}-\sqrt[3]{27}}{26-27}=\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{27}}{-1}=3-\sqrt[3]{2}$$

elde edilir.

Örnek 11 $f(k)=\dfrac{k+3}{\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2+9k+18}}$ *olduğuna göre,*

$S=f(1)+f(4)+f(7)+\cdots+f(43)$ *toplamını hesaplayınız.*

Çözüm : $f(k)$ ifadesini, paydanın eşleniği ile çarparsak,

$$f(k)=\frac{\left(\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2+9k+18}\right)(k+3)}{(k^2+3k)-(k^2+9k+18)}=\frac{-1}{6}\left(\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2+9k+18}\right)$$

elde edilir. Yani, $f(k)=-(\sqrt{k}\sqrt{k+3}-\sqrt{k+3}\sqrt{k+6})/6$ olur. Buna göre, k'ya sırasıyla $1,4,7,\ldots,43$ değerleri verilirse,

$$S=\frac{-1}{6}\left(\sqrt{1}\sqrt{4}-\sqrt{4}\sqrt{7}+\sqrt{4}\sqrt{7}-\sqrt{7}\sqrt{10}+\cdots+\sqrt{43}\sqrt{46}-\sqrt{46}\sqrt{49}\right)$$

olur. Hesaplanırsa,

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(43)=\frac{-1}{6}\left(\sqrt{1}\sqrt{4}-\sqrt{46}\sqrt{49}\right)=\frac{7\sqrt{46}-2}{6}$$

bulunur.

1.5 Ardışık Sayıların Toplamı (Gauss toplamı)

Belirli bir kurala göre art arda gelen sayı dizilerine **ardışık sayılar** denir. Artış miktarı k olan n tane sayının toplamını hesaplamak için, bu sayıları artan sırada ve azalan sırada alt alta yazıp toplarsak,

$$\begin{array}{rlllll} S = & (m+k) & + & (m+2k)+ & \cdots & +(m+nk) \\ +S = & (m+nk) & + & (m+(n-1)k)+ & \cdots & +(m+k) \\ \hline 2S = & (2m+(n+1)k) & + & (2m+(n+1)k)+ & \cdots & +(2m+(n+1)k) \end{array}$$

olur. Buradan,

$$S = n \cdot \frac{(2m + (n+1)\,k)}{2}$$

elde edilir. Yani, ardışık sayıların toplamı, ilk terimle son terimin toplamının yarısının, terim sayısı ile çarpılmasıyla bulunur. Kısaca,

$$T = \left(\frac{\text{İlk terim + Son terim}}{2}\right)\underbrace{\left(\frac{\text{Son terim - İlk terim}}{\text{Artış Miktarı}}+1\right)}_{\text{Terim sayısı}}$$

formülü kullanılır. Örneğin,

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$
$$2+4+6+\cdots+2n = n\,(n+1)$$
$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 12 $\{10, 11, 12, 13, ..., 19\}$ *kümesinin her bir elemanı ile* $\{20, 21, 22, 23, ..., 29\}$ *kümesinin elemanları çarpılarak toplanırsa toplam kaç olur?*

Çözüm : Soruda istenen $(10 + 11 + \cdots + 19)\cdot(20 + 21 + \cdots + 29)$ çarpımının sonucudur. Buna göre,

$$10+11+\cdots+19 = \frac{(19+10)\cdot 10}{2} = 145$$
$$20+21+\cdots+29 = \frac{(29+20)\cdot 10}{2} = 245$$

olduğundan $145 \cdot 245 = 35\,525$ elde edilir.

Örnek 13 n *tane ardışık sayının toplamı* 1000 *olduğuna göre*, n*'nin alabileceği değerleri bulunuz.*

Çözüm : $S = (m+1) + (m+2) + \cdots + (m+n) = 1000$ olarak yazabiliriz.

$$S = \frac{n\cdot(2m+n+1)}{2} = 1000$$

eşitliğinden $n \cdot (2m + n + 1) = 2000 = 2^4 \cdot 5^3$ olur.

Buna göre,

$$2000 = n \cdot (2m+n+1) = n + 2mn + n^2 > n^2$$

olduğundan $n \leq [\![\sqrt{2000}]\!] = 44$ olur. Diğer taraftan,

$$2^4 \cdot 5^3 = n \cdot (2m+n+1)$$

eşitliğine göre,

i) n tek sayı ise, $(2m+n+1)$ çifttir ve bu durum için $n = 1, 5$ ve 25 seçilebilir;

ii) n çift sayı ise, $(2m+n+1)$ ifadesi tektir ve bu ancak $n = 2^4 = 16$ olmasıyla mümkündür.

Örnek 14 100 *sayısı ardışık sayıların toplamı şeklinde kaç farklı şekilde yazılabilir?*

Çözüm : $n \cdot (2m+n+1) = 200 = 2^3 \cdot 5^2$ ve $n \leq [\![\sqrt{200}]\!] = 14$ olmalıdır. Diğer taraftan, önceki sorudaki gibi, $n \cdot (2m+n+1)$ çarpanlarının biri tek biri çift olmalıdır. n çift iken çözümün olması, 2'nin en büyük kuvveti durumunda iken mümkündür. Buna göre, $n = 1, 5$ ya da $n = 8$ alınabilir.

NOT : *Bir sayı en az iki ardışık sayının toplamı şeklinde ise 2^n biçiminde yazılamaz. 2^n biçiminde yazılamayan her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır. Gerçekten,*

$$S = (m+1) + (m+2) + \cdots + (m+n)$$

ise $2S = n \cdot (2m+n+1)$ olur. Bu ifadede, n ve $(2m+n+1)$ ifadelerinin biri tek diğeri çifttir. O halde, sol tarafdaki $2S$ sayısının da bir tek ve bir çift sayının çarpımı olabilmesi için, S'nin mutlaka bir tek çarpana sahip olması gerekir. S tek çarpana sahip ise, $2S = n \cdot (2m+n+1)$ denklemini sağlayan m ve n sayıları bulunabilir. Aksi halde, m ve n sayıları bulunmaz. O halde, S sayısı 2^n biçiminde ise, en az ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazılabilmesi mümkün değildir.

Örnek 15 1000*'den küçük olan ve* 2 *veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak yazılamayan kaç pozitif tamsayı vardır?* (*UMO* 2006)

A) 6 *B*) 10 *C*) 26 *D*) 68 *E*) 72

Çözüm : $S = (m+1) + (m+2) + \cdots + (m+n) = \dfrac{(2m+n+1) \cdot n}{2}$ olarak yazabiliriz. $2S = (2m+n+1) \cdot n$ ifadesinde, n tek ise $(2m+n+1)$ çift ve n çift ise, $(2m+n+1)$ tektir. Dolayısıyla, sorunun çözümü için, 1'den 1000'e kadar olan sayıların 2 katının, bir tek ve bir çift çarpana sahip olmayanlarını bulmamız gerekir. Bu durum, sadece 1, 2 ve 2'nin kuvvetlerinde mümkündür. Böylece istenen sayılar 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ve 512 olur ve 10 tanedir.

Örnek 16 *A kümesi toplamı $2m$ olan m tane ardışık sayıdan ve B kümesi de toplamı m olan $2m$ tane ardışık sayıdan oluşmaktadır. A ve B kümelerinin en büyük elemanlarının arasındaki farkın mutlak değeri 11 ise m kaçtır?*

Çözüm : $(a+1)+\cdots+(a+m)=\dfrac{m(2a+m+1)}{2}=2m$ eşitliğinden, $m=3-2a$ ve $(b+1)+\cdots+(b+2m)=m(2b+2m+1)=m$ eşitliğinden de $m=-b$ elde edilir. Bu iki denkleme göre a ve b'nin negatif olması gerektiği görülür. O halde,

$$|(a+m)-(b+2m)|=|a-b-m|=11$$

eşitliğinde $m=-b$ yazılırsa, $|a|=11$ eşitliğinden

$$a=-11 \text{ ve } m=3-2(-11)=25$$

olur.

Örnek 17 *3^{11} sayısı en çok sayıda ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak yazıldığında ilk sayı kaç olur?*

Çözüm : $(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+m)=3^{11}$ olacak şekildeki en büyük m sayısını arıyoruz.

$$m(2k+m+1)=2\cdot 3^{11}$$

eşitliğine göre, $m<2k+m+1$ olacak şekilde, m en büyük $2\cdot 3^5$ seçilebilir. Bu durumda,

$$2k+2\cdot 3^5+1=3^6$$

eşitliğinden $k=\dfrac{3^5-1}{2}=121$ elde edilir. O halde, ilk sayı 122 olur.

Örnek 18 $1,2,3,...,2007$ *sayı dizisindeki tüm sayıların rakamlarının toplamı kaçtır?*

Çözüm : $1,2,3,...,999$ sayılarının rakamlarının toplamını bulalım. $0,1,2,...,9$ rakamları ile oluşturulacak üç basamaklı bir sayıda her bir basamakta $0,1,2,...,9$ rakamları $1000/10$ kez bulunur. O halde, $1,2,3,...,999$ sayılarının rakamlarının toplamı

$$(0+1+\cdots+9)\cdot\left(\frac{1000}{10}\right)\cdot 3=13500$$

olur. Bu durumda, $1,2,3,...,1999$ sayılarının rakamlarının toplamı ise

$$2\cdot 13500+1000=28000$$

elde edilir. Geriye $2000,2001,...,2007$ sayılarının rakamları toplamını bulmak kalır. Bu da $2\cdot 8+(7\cdot 8)/2=44$ olur ki, istenen yanıt 28044 olur.

Örnek 36 $[\![x]\!]$, *x sayısının x'den büyük olmayan en büyük tamdeğerini gösterdiğine göre,* $[\![\sqrt{1}]\!]+[\![\sqrt{2}]\!]+[\![\sqrt{3}]\!]+\cdots+[\![\sqrt{99}]\!]$ *toplamını hesaplayınız.*

Çözüm : $[\![\sqrt{x}\,]\!]=m$ eşitliğini sağlayan x değerleri $m^2 \le x < (m+1)^2$ aralığındadır. Buna göre,

$$[\![\sqrt{1}]\!]=[\![\sqrt{2}]\!]=[\![\sqrt{3}]\!]=1, \qquad (2^2-1^2=3 \text{ tane } 1)$$
$$[\![\sqrt{4}]\!]=[\![\sqrt{5}]\!]=\cdots=[\![\sqrt{8}]\!]=2, \qquad (3^2-2^2=5 \text{ tane } 2)$$
$$[\![\sqrt{9}]\!]=[\![\sqrt{10}]\!]=\cdots=[\![\sqrt{15}]\!]=3, \qquad (4^2-3^2=7 \text{ tane } 3)$$

şeklinde devam edersek,

$$[\![\sqrt{81}]\!]=[\![\sqrt{82}]\!]=\cdots=[\![\sqrt{99}]\!]=9, \qquad (10^2-9^2=19 \text{ tane } 9)$$

olacağından,

$$[\![\sqrt{1}]\!]+[\![\sqrt{2}]\!]+[\![\sqrt{3}]\!]+\cdots+[\![\sqrt{99}]\!]=3\cdot 1+5\cdot 2+\cdots+19\cdot 9$$

olacaktır. Bu toplamı, toplam formülüyle

$$\sum_{k=1}^{9}(2k+1)\,k$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece,

$$\sum_{k=1}^{9}(2k+1)\,k=\sum_{k=1}^{9}\left(2k^2+k\right)=2\cdot\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}+\frac{9\cdot 10}{2}=615$$

bulunur.

Not : En genel halde,

$$[\![\sqrt{1}]\!]+[\![\sqrt{2}]\!]+[\![\sqrt{3}]\!]+\cdots+[\![\sqrt{n^2-2}]\!]+[\![\sqrt{n^2-1}]\!]=\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 37 $[\![x]\!]$, *x sayısının x'den büyük olmayan en büyük tamdeğerini gösterdiğine göre,*

$$[\![\sqrt[3]{1}]\!]+[\![\sqrt[3]{2}]\!]+[\![\sqrt[3]{3}]\!]+\cdots+[\![\sqrt[3]{n^3-2}]\!]+[\![\sqrt[3]{n^3-1}]\!]$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm : $[\![\sqrt[3]{x}]\!]=m$ eşitliğine göre $m^3 \le x < (m+1)^3$ olduğundan, önceki sorudakine benzer şekilde,

$$2^3-1^3=7 \quad \text{tane } 1,$$
$$3^3-2^3=19 \quad \text{tane } 2,$$
$$\vdots$$
$$n^3-(n-1)^3 \quad \text{tane } n-1,$$

vardır.

Diğer taraftan,

$$\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}$$

olduğundan,

$$\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right)$$

elde edilir. Buna göre, tüm terimleri bu şekilde kesirlere parçalarsak,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1^2-1+1}-\frac{1}{2^2-2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-2+1}+\frac{1}{3^2-3+1}\right)+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2-1+1}\right) \end{aligned}$$

eşitliğinden, $S=1/2$ bulunur.

Örnek 47 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+4}$ *serisinin değerini bulunuz.* (*Harvard MIT Math. Tournament 2008*)

Çözüm : $n^4+4=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right)$ biçiminde çarpanlara ayrılabileceğinden,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+4} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-2n+2)}-\frac{1}{(n^2+2n+2)} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left((n-1)^2+1\right)}-\frac{1}{\left((n+1)^2+1\right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{0^2+1}+\frac{1}{1^2+1}\right)=\frac{3}{8}$$

bulunur.

Örnek 50 $\dfrac{\left(2^3-1\right)\left(3^3-1\right)\left(4^3-1\right)\cdots\left(100^3-1\right)}{\left(2^3+1\right)\left(3^3+1\right)\left(4^3+1\right)\cdots\left(100^3+1\right)}=?$

Çözüm : $\dfrac{(2-1)\left(2^2+2+1\right)\left(3^3-1\right)\left(3^2+3+1\right)\cdots}{(2+1)\left(2^2-2+1\right)\left(3^3+1\right)\left(3^2-3+1\right)\cdots}$
şeklinde çarpanlara ayıralım.

$$((n+2)-1)=n+1 \text{ ve } (n+1)^2-(n+1)+1=n+n+1$$

olduğundan, sadeleştirmeler yapılarak,

$$\frac{(2-1)(3-1)\left(100^2+100+1\right)}{\left(2^2-2+1\right)(99+1)(100+1)}=\frac{10101}{15150}=\frac{3367}{5050}$$

elde edilir.

Örnek 51 $T_n=1+2+3+\cdots+n$ *ve* $P_n=\dfrac{T_2}{T_2-1}\cdot\dfrac{T_3}{T_3-1}\cdot\dfrac{T_4}{T_4-1}\cdots\dfrac{T_n}{T_n-1}$ *olmak üzere*, $P_{100}=?$

Çözüm : $T_n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ eşitliğinden,

$$\frac{T_n}{T_n-1}=\frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{\frac{n\cdot(n+1)}{2}-1}=\frac{n\cdot(n+1)}{n\cdot(n+1)-2}=\frac{n\cdot(n+1)}{(n-1)(n+2)}$$

elde edilir. Buna göre,

$$P_n=\frac{2\cdot3}{1\cdot4}\cdot\frac{3\cdot4}{2\cdot5}\cdot\frac{4\cdot5}{3\cdot6}\cdot\frac{5\cdot6}{4\cdot7}\cdots\frac{(n-1)\cdot n}{(n-2)(n+1)}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{(n-1)(n+2)}=\frac{3n}{(n+2)}$$

olur. Böylece, $P_{100}=\dfrac{300}{102}=\dfrac{50}{17}$ bulunur.

Örnek 52 $T_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ *ve*

$$P_n=\frac{4T_2}{2\left(T_2-T_1\right)}\cdot\frac{4T_3}{3\left(T_3-T_2\right)}\cdots\frac{4T_n}{n\left(T_n-T_{n-1}\right)}$$

olmak üzere, $P_{25}=?$

Çözüm : $T_n=\left(\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$ ve $T_n-T_{n-1}=n^3$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{4T_n}{n\left(T_n-T_{n-1}\right)}=\frac{4\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2}{n\cdot n^3}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

olur. Buna göre, $P_{25}=\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\dfrac{26}{25}\right)^2=169$ bulunur.

1.12 Karışık Örnekler

Örnek 56 $S=\left(\dfrac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+3\cdot 6\cdot 12+\cdots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+3\cdot 9\cdot 27+\cdots+n\cdot 3n\cdot 9n}\right)^{1/3}$ *ifadesinin sonucunu bulunuz.* (*KANADA M.O.* 1975)

Çözüm : $S=\left(\dfrac{8\left(1+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)}{27\left(1+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)}\right)^{1/3}=\left(\dfrac{8}{27}\right)^{1/3}=\dfrac{2}{3}$ bulunur.

Örnek 57 $A=1+10+10^2+\cdots+10^{97}$ *toplamının karekökünün, virgülden sonraki* 50*'nci rakamı kaçtır?*

Çözüm : Yani, $10^{50}\sqrt{A}$ sayısının birler basamağını arıyoruz.

$$10^{50}\sqrt{A}=10^{50}\sqrt{\frac{10^{98}-1}{9}}=\frac{\sqrt{10^{198}-10^{100}}}{3}$$

dür. $\left(10^{99}-7\right)^2<10^{198}-10^{100}<\left(10^{99}-4\right)^2$ olduğundan,

$$\frac{10^{99}-7}{3}\quad<\quad 10^{50}\sqrt{A}<\frac{10^{99}-4}{3}$$

$$\frac{\overbrace{99...9}^{98\text{ tane}}3}{3}\quad<\quad 10^{50}\sqrt{A}<\frac{\overbrace{99...9}^{98\text{ tane}}6}{3}$$

olur. Yani, $10^{50}\sqrt{A}$ sayısı, 333...31'den büyük ve 333...32'den küçüktür. O halde, birler basamağı 1'dir. Dolayısıyla, A sayısının 50'nci basamağı 1 olur.

Örnek 58 *Birbirinden farklı pozitif reel sayılardan oluşan* $\{a_1,a_2,...,a_{100}\}$ *kümesinin boş olmayan her bir alt kümesinin elemanları toplanarak* $2^{100}-1$ *tane toplam elde ediliyor. Buna göre, en az kaç farklı toplam elde edilebilir.* (*SSCB M.O.* 1963)

Çözüm : $a_1<a_2<\cdots<a_{100}$ kabul edebiliriz. Bu durumda, toplamları eleman sayısına göre, artan sırada yazalım.

1 elemanlılar için, $a_1<a_2<\cdots<a_{100}$ ise 100 farklı toplam vardır.

2 elemanlılar için, $a_1+a_{100}<a_2+a_{100}<\cdots<a_{99}+a_{100}$ ise 99 farklı toplam vardır.

3 elemanlılar için, $a_1+a_{99}+a_{100}<a_2+a_{99}+a_{100}<\cdots<a_{98}+a_{99}+a_{100}$ ise 98 farklı toplam vardır. Bu şekilde devam edersek,

100 elemanlı $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$, yani, 1 farklı toplam elde edilir.

Böylece, farklı toplamların sayısı en az : $1+2+3+\cdots+100=(100\cdot 101)/2=5050$ elde edilir.

Örnek 63 $a_1 = 2, a_2 = 3, ..., a_{n+1} = 1 + a_1a_2...a_n$ $(n \geq 1)$ *olarak tanımlanıyor.*

$$S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \quad ve \quad P_n = \frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$$

olduğuna göre, $S_{101} + P_{101}$ *toplamını hesaplayınız.*

Çözüm : $S_1 + P_1 = 1$, $S_2 + P_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6} = 1$, ... olduğundan, $S_n + P_n = 1$ olduğunu iddia ediyoruz. $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ ve $P_{n+1} = \frac{P_n}{a_{n+1}}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} P_n - P_{n+1} &= P_n\left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{P_n}{a_{n+1}}(a_{n+1} - 1) \\ &= \frac{P_n}{a_{n+1}}(a_1a_2\cdots a_n) \\ &= \frac{1}{a_{n+1}} = S_{n+1} - S_n \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $S_{n+1} + P_{n+1} = S_n + P_n = 1$ bulunur.

Örnek 64 n *sayısı* 1*'den büyük bir tamsayıyı gösterdiğine göre*,

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)}{n+1} > \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)}{n}$$

olduğunu kanıtlayınız. (*KANADA M.O.* 1998)

Çözüm : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}$ $(*)$ eşitsizliğinin sağlandığı aşikardır. Eşit sayıda terim var ve sağ taraftaki ifadelerin paydaları daha büyük olduğundan, sağ taraftaki ifade daha küçüktür. Diğer taraftan,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

olduğundan,

$$n \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{veya} \quad \frac{1}{2} \geq \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}}{n}$$

olur. Bu eşitsizlikle $(*)$ eşitsizliğini taraf tarafa toplarsak,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

veya

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)}{n+1} > \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)}{n}$$

elde edilir.

Örnek 65 *$F_1 = 1$, $F_2 = 1$, ve $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ şeklinde tanımlanan F_n Fibonacci dizisi için, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{3^k}$ serisinin değerini hesaplayınız.*

Çözüm : $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{3^k} = \frac{F_1}{3} + \frac{F_2}{9} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{F_{k-1} + F_{k-2}}{3^k}$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{F_{k-1}}{3^k} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{F_{k-2}}{3^k}$$

olur. Burada toplam semollerindeki sınırları değiştirirsek,

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{F_k}{3^k} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{3^k}$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(S - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}S,$$

eşitliğinden, $S = \frac{3}{5}$ bulunur.

Örnek 66 *$f(x) = \frac{2(1-x)^{2009} - 2x^{2009} + 1}{2}$ ve $x_i = \frac{i}{2009}$ olduğuna göre,*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2009})$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm : $f(x) + f(1-x)$ toplamınının 1'e eşit olduğunu kullanacağız. Gerçekten,

$$f(x) + f(1-x) = \frac{2(1-x)^{2009} - 2x^{2009} + 1}{2} + \frac{2x^{2009} - 2(1-x)^{2009} + 1}{2} = 1$$

'dir. Diğer taraftan,

$$x_i = \frac{i}{2009} \text{ ve } 1 - x_i = \frac{2009 - i}{2009} = f(x_{2009-i})$$

olduğundan

$$f(x_i) + f(x_{2009-i}) = 1$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2009}) &= 1004 + f(x_{2009}) \\ &= 1004 + f(1) \\ &= 1004 - \frac{1}{2} = \frac{2007}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 71 $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{6}{x^2-9}+\cdots+\dfrac{20}{x^2-100}$ *ifadesinin,*

$$\frac{11}{(x-1)(x+10)}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{11}{(x-10)(x+1)}$$

ifadesine eşit olduğunu gösteriniz. (*SSCB M.O.* 1968)

Çözüm : Sol tarafdaki ifade,

$$\begin{aligned}&\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\cdots+\frac{20}{x^2-100}\\ =&\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+10}-\frac{1}{x-10}\end{aligned}$$

ve sağ tarafdaki ifade ise,

$$\begin{aligned}&\frac{11}{(x-1)(x+10)}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{11}{(x-10)(x+1)}\\ =&\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+9}+\cdots+\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

olduğundan eşitlik görülür.

Örnek 72 $S(n)$, *ilk n pozitif tamsayının toplamını göstersin. Buna göre, eğer n ve $S(n)$ sayılarının her ikisi de bir tamkare ise n sayısına fantastik sayı diyelim. Örneğin,* 49 *sayısı fantastik bir sayıdır, çünkü,*

$$49=7^2 \text{ ve } S(49)=1+2+3+\cdots+49=1225=35^2$$

sayıları tamkaredir. 49 *sayısından büyük başka bir fantastik sayı bulunuz.*

Çözüm : $n=k^2$ olsun.

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{k^2\left(k^2+1\right)}{2}$$

sayısının tamkare olmasını istiyoruz. k^2 bir tamkare olduğundan, $\left(k^2+1\right)/2$ sayısının tamkare olması yeterlidir. O halde, $\left(k^2+1\right)/2=m^2$, $m\in\mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda,

$$k^2-2m^2=\left(k+m\sqrt{2}\right)\left(k-m\sqrt{2}\right)=-1$$

olmalıdır. Bu eşitliği $(k,m)=(7,5)$ sağlar. Yani, soruda verilen örnek sağlanır. Bu eşitliği, $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)=1$ ile çarpalım. Bu çarpıma P dersek,

$$\begin{aligned}P&=(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\\&=(7+5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\\&=(41+29)\sqrt{2}(41-29\sqrt{2})\\&=41^2-2\cdot 29^2=-1\end{aligned}$$

olduğundan, $(k,m)=(41,29)$ sayı çifti de, $k^2-2m^2=-1$ eşitliğini sağlar. Böylece, $n=41^2=1681$ sayısı da bir fantastik sayıdır.

Örnek 73 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$ *olsun. Bu durumda*, $S=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\cdots$ *serisinin değerini hesaplayınız.*

Çözüm :
$$\begin{aligned}\frac{1}{(2n-1)(2n)(2n+1)}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)}-2\frac{1}{2n}+\frac{1}{(2n+1)}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n+1)}-\frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$
olduğundan,
$$\begin{aligned}S(n)=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{2n}\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)}-\frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$
eşitliğine göre,
$$\begin{aligned}S=&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{2}\left(-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots\right)\\S=&\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}(-1+\ln 2)=\ln 2-\frac{1}{2}\end{aligned}$$
elde edilir.

Örnek 74 *Her k pozitif tamsayısı,* $0\le f_i\le i$ *ve* $0<f_m$ *olmak üzere,*
$$k=1!\cdot f_1+2!\cdot f_2+3!\cdot f_3+\cdots+m!\cdot f_m$$
biçiminde tek türlü yazılabilir. Buradaki, $(f_1,f_2,f_3,...,f_m)$ *ifadesine* k *sayısının faktöriyel taban açılımı diyelim. Buna göre,* $(f_1,f_2,f_3,...,f_n)$*,*
$$16!-32!+48!-64!+\cdots+1968!-1984!+2000!$$
ifadesinin faktöriyel taban açılımı olduğuna göre,
$$f_1-f_2+f_3-f_4+\cdots+(-1)^{n+1}f_n=?$$
ifadesinin değeri kaçtır? (*AIME* 2000)

Çözüm : $(n+1)!=(n+1)\,n!=n\cdot n!+n!$ biçiminde yazılabilir. Şimdi, benzer şekilde eşitliğin sağ tarafindaki ifadeyi yeniden yazalım. Buna göre,
$$\begin{aligned}(n+1)!&=n\cdot n!+(n-1)(n-1)!+(n-1)!\\&=n\cdot n!+(n-1)(n-1)!+(n-2)(n-2)!+(n-3)!\\&\cdots\\&=n\cdot n!+(n-1)(n-1)!+(n-2)(n-2)!+\cdots+2\cdot 2!+1!\end{aligned}$$
olur.